

100 AÑOS DE TEORÍA CINÉTICA RELATIVISTA

**Leopoldo García-Colín Scherer
Guillermo Chacón Acosta
Leonardo Dagdug**

EDITORES



Casa abierta al tiempo

Rector General

Salvador Vega y León

Secretario General

Norberto Manjarrez Álvarez

Coordinador General de Difusión

Walterio Francisco Beller Taboada

Director de Publicaciones y Promoción Editorial

Bernardo Ruiz López

Subdirectora de Publicaciones

Laura González Durán

Subdirector de Distribución y Promoción Editorial

Marco Moctezuma

UNIDAD IZTAPALAPA

Rector

Javier Velázquez Moctezuma

Secretario

Miguel Ángel Gómez Fonseca

Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería

José Antonio de los Reyes Heredia

Jefe del Departamento de Física

Hugo Aurelio Morales Técotl

Primera edición, junio de 2013

Distribución mundial

Imagen de portada: Guillermo Chacón Acosta

D.R. © 2013, Universidad Autónoma Metropolitana

Prolongación Canal de Miramontes 3855,

Ex Hacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan 14387 México, D.F.

Unidad Iztapalapa / División de Ciencias Básica e Ingeniería /

Departamento de Física

Tel. (55) 5804 4610, ext. 108

dll@xanum.uam.mx

ISBN: 9786074-779035

Esta publicación no puede ser reproducida, ni en todo ni en parte, ni registrada o transmitida, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma y por ningún medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o cualquier otro, sin el permiso previo y por escrito, de los editores.

Impreso en México / *Printed in Mexico*

Prefacio

Conocí al doctor Leopoldo García-Colín alrededor del año 2000 en una conferencia que ofreció en el ciclo de seminarios del Departamento de Física de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, en la que habló sobre el flujo de calor en los sistemas relativistas. En ese entonces yo estaba comenzando la Licenciatura en Física en dicha Universidad, probablemente tendría uno o dos trimestres de estar inscrito en la carrera y por lo tanto las bases matemáticas que tenía aún no eran muy amplias.

Varias cosas me llamaron la atención de esa conferencia. Lo primero fue el poder de convocatoria del Dr. García-Colín, ya que a diferencia de otros seminarios el que él ofreció superaba la capacidad del salón. La sala en que se llevaban a cabo los seminarios llevaba su nombre, lo cual me hacía pensar, como estudiante, que el Doctor era una persona muy importante y que valía mucho la pena atender esa charla. Comenzada la conferencia me sorprendió ver a un hombre de alrededor de setenta años, hablar con tanto ímpetu y tanta pasión sobre el trabajo que hacía. Como estudiantes nos motivaba ver a alguien que había dedicado gran parte de su vida al quehacer científico, y que a esa edad siguiera muy activo e interesado por seguir realizando investigación original, formando estudiantes y platicando de sus hallazgos. Tanto entusiasmo me transmitió esa charla que no me di cuenta de inmediato que casi no había entendido nada. Entre lo que recuerdo no haber comprendido estaba el término “derivada covariante” y “tensor de energía-momento”. En esos días mi inclinación era hacia la astronomía, sin embargo, después de esa plática decidí que debía comprender cabalmente el significado de esos términos y a partir de entonces empecé a llevar cursos de relatividad y gravitación.

Al comenzar mi posgrado estuve interesado en estudiar ciertas cuestiones de gravedad cuántica. Nunca imaginé que comenzando en esa área acabaría trabajando en temas cercanos a los que García-Colín nos había mostrado en aquella conferencia y que, de hecho, había trabajado los últimos años. Una parte importante de mi investigación en el posgrado se centró en estudiar las propiedades de transformación entre marcos de referencia de la función de distribución para un gas relativista. Al final de mis estudios el Dr. García-Colín fue parte del jurado que evaluó mi trabajo para obtener el grado de doctor. Durante su evaluación tuve la oportunidad de discutir con él varias cuestiones de teoría cinética y las diversas formas de estudiar ésta en el régimen relativista. Estos acercamientos con García-Colín me llevaron a asistir poco a poco a las reuniones que tenía con un grupo especializado en aspectos de termodinámica y estadística en relatividad, con colaboradores de la UAM y de la Universidad Iberoamericana.

En 2011 se cumplió un siglo de la publicación del trabajo original de Ferencz Jüttner en donde derivó por vez primera la función de distribución del equilibrio para el gas simple relativista; esto marca el inicio de los estudios térmicos en el régimen de la teoría de la relatividad. Conversando con García-Colín y Leonardo Dagdug, surgió la idea de realizar la edición del presente volumen para conmemorar la aparición de los trabajos de Jüttner, con la justificación adicional de que, al menos los últimos dieciséis años, García-Colín se dedicó a cultivar esta área de la Física en México, logrando contribuciones significativas.

Como primer paso García-Colín y yo con ayuda de Ertan Göklü, realizamos las versiones al español de los trabajos originales de Jüttner para incluirlos como parte de este volumen conmemorativo. En seguida, invitamos a colaborar a varios investigadores mexicanos y extranjeros activos en el tema. Al respecto he de mencionar que casi inmediatamente recibimos respuesta y todos los investigadores se mostraron muy contentos en participar. A mediados de septiembre de 2012 el trabajo estaba casi terminado, faltaban únicamente algunos detalles editoriales y de estilo, cuando lamentablemente, a días de enviar el presente volumen a la imprenta, nos enteramos del fallecimiento del doctor Leopoldo García-Colín, el 8 de octubre de 2012 en la Ciudad de México.

Además de todas sus lecciones académicas, una de las cosas que Don Leo nos enseñó fue a tener un espíritu impetuoso ante el trabajo y realizarlo siempre en beneficio de la sociedad, comprendiendo que la investigación científica conllevará a una educación de mejor calidad. Más allá de todos los homenajes que recibió y recibirá, considero personalmente que una forma de recordar al doctor García-Colín es continuar con ese ánimo y trabajar sin dejar incompleto ningún proyecto. Concluimos entonces este trabajo, ahora póstumo para Don Leo, con su publicación con el apoyo de la Universidad Autónoma Metropolitana, en particular del Dr. Javier Velázquez Moctezuma, actual rector de la Unidad Iztapalapa.

GCA

Mi amistad con el doctor Leopoldo García-Colín se extendió por más de veinte memorables años. Fue una amistad como todas, hubo desencuentros, coincidencias, alegrías, tristezas, problemas, soluciones, confesiones, simpatía y tolerancia; pero siempre todo ocurrió con respeto y cariño. Mi primera experiencia con él fue como alumno del curso de Física Estadística de la licenciatura en Física en la Universidad Autónoma Metropolitana. Nunca imaginé que esa estupendas y estimulantes clases cambiarían mi vida profesional y personal para siempre. Dirigió mis tesis de maestría y doctorado y fue pieza fundamental para que yo viajara al National Institutes of Health a hacer un posdoctorado con George Weiss, su compañero de escritorio durante su estancia en Maryland University. En esos momentos en que mi vida profesional se enfocó en la aplicación de la física a los sistemas biológicos, una vez más, él fue quien hizo que todo fuera posible. Mi regreso a México también fue por iniciativa suya, y con ello también inició una nueva etapa profesional en la que me entusiasmó para que trabajáramos en la ecuación de Boltzmann aplicada a plasmas y a fenómenos relativistas. Temas que ocuparon sus más grandes esfuerzos intelectuales al final de su vida, esta edición es una clara muestra de ello.

LDL

Dedicamos el presente volumen a la memoria de un gran científico mexicano.

México D. F., octubre 2012

Contenido

1. Introducción: 100 años de la teoría cinética relativista	1
Bibliografía	5
2. Confirmación de la distribución de Jüttner por medio de experimentos numéricos y parametrizaciones de tiempo propio	
<i>D. Cubero</i>	9
2.1. Introducción	10
2.2. Preliminares	11
2.3. Deducción de la distribución de Jüttner	15
2.4. Verificación numérica de la distribución de Jüttner	19
2.5. Ergodicidad y aplicaciones de la distribución de Jüttner modificada	27
Bibliografía	35
3. Función de distribución manifiestamente covariante para un gas relativista en equilibrio	
<i>G. Chacón Acosta, L. Dagdug y H. A. Morales Técol</i>	41
3.1. Introducción	42
3.2. Ecuación de Boltzmann Relativista	44
3.3. Momento de un Gas relativista	51
3.4. Teorema de equipartición relativista	55
3.5. Discusión	59
Bibliografía	63

4. Estabilidad termodinámica de fluidos relativistas y su relación con la teoría cinética a primer orden en los gradientes	
<i>A. Sandoval Villalbaz y A. L. García Perciante</i>	67
4.1. Introducción	68
4.2. Ecuaciones fenomenológicas	68
4.3. Sistema linealizado y análisis de estabilidad	70
4.4. Flujo de calor y estabilidad del sistema	72
4.5. Consideraciones finales	77
Bibliografía	78
5. Velocidad y distribución del CNB	
<i>J. Alfaro y P. González</i>	81
5.1. Introducción	82
5.2. Velocidad de los neutrinos primordiales	83
5.3. Distribución del CNB	88
Bibliografía	100
6. Validez de las relaciones de reciprocidad de Onsager para una mezcla binaria inerte relativista	
<i>V. Moratto y L. S. García-Colín</i>	103
6.1. Introducción	104
6.2. El problema	106
6.3. Ecuaciones de balance	107
6.4. Método de Chapman-Enskog	114
6.5. Producción de entropía	119
Bibliografía	124
7. Las leyes de Ohm y de Fourier relativistas para mezclas binarias de electrones con protones y fotones	
<i>G. M. Kremer</i>	127
7.1. Introducción	128
7.2. Ecuación relativista de Uehling-Uhlenbeck	128
7.3. Descomposición de Landau-Lifshitz	132
7.4. Método de Chapman-Enskog	134
7.5. Las leyes de Ohm y de Fourier	137
7.6. Conductividades eléctricas y térmicas	140
Bibliografía	143

8. Conducción de calor en fluidos auto-gravitantes relativistas	145
<i>R. A. Sussman</i>	145
8.1. Introducción	146
8.2. Termodinámica de fluidos relativistas conductores de calor	147
8.3. Ecuaciones constitutivas.	149
8.4. Espacio-tiempos con simetría esférica	150
8.5. Ecuaciones de evolución del formalismo “1+3”	151
8.6. El gas ideal monatómico no-relativista	153
8.7. Ecuaciones constitutivas causales	154
8.8. Ecuación completa vs ecuación truncada	155
8.9. El tiempo de relajación	157
8.10. Ecuaciones constitutivas como vínculos	160
8.11. Integración del sistema 1+3	162
8.12. Comentarios finales	164
Bibliografía	165
9. ¿Cómo alimentar agujeros negros con un apetito feroz? Discos de acreción enfriados por neutrinos	
<i>W. H. Lee</i>	169
9.1. Introducción	170
9.2. Los discos de acreción como un fenómeno astrofísico	171
9.3. La acreción hipercrítica y los destellos de rayos gamma	174
9.4. Escalas típicas y ecuación de estado en el régimen hipercrítico	176
9.5. Régimen termodinámico y ecuación de estado	178
9.6. Consecuencias observables y conclusiones	182
Bibliografía	183
10. Rapidez del sonido en un condensado de Bose-Einstein y la ecuación de Zaremba-Nikuni-Griffin	
<i>A. Camacho</i>	187
10.1. Introducción	188
10.2. Rapidez del sonido en un condensado	190
10.3. Discusión y resultados	197
Bibliografía	200
A. Apéndices: Ferencz Jüttner	203

B. Ley de Maxwell para la distribución de velocidades en la teoría de la relatividad	205
<i>F. Jüttner</i>	
B.1. La entropía de un gas monoatómico estático en un estado arbitrario	206
B.2. La ley para la distribución espacial y de velocidades en equilibrio termodinámico .	208
B.3. La función de distribución f que pertenece al elemento de área usual $d\sigma$	211
B.4. Determinación de las constantes α y β que aparecen en la distribución F	212
B.5. La entropía en equilibrio termodinámico	214
B.6. Evaluación de la integral definida $M(\beta)$	219
B.7. Las funciones termodinámicas relativistas de un gas monoatómico ideal	223
B.8. Discusión numérica	224
Bibliografía	228
C. Dinámica de un gas en movimiento en la teoría de la relatividad	231
<i>F. Jüttner</i>	
C.1. Resumen de las fórmulas básicas para el potencial cinético	232
C.2. Dinámica general de un gas ideal monoatómico en movimiento	235
C.3. Reducción de la dinámica del gas para bajas temperaturas y velocidades pequeñas .	238
C.4. Tipos de movimientos especiales de los gases	241
C.5. El valor numérico de la masa de los gases	243
Bibliografía	244

Introducción: 100 años de la teoría cinética relativista

Sin duda alguna se puede afirmar que la teoría cinética relativista comenzó con la deducción de la función de distribución de equilibrio para un gas relativista simple realizada por Ferencz Jüttner en 1911, [1]. Esta distribución, ahora conocida como distribución de Jüttner, es la contraparte relativista de la bien conocida función de distribución de Maxwell-Boltzmann para la distribución de velocidades de un gas en equilibrio. En sus trabajos de 1911, Ferencz Jüttner estudia un gas en equilibrio tanto en reposo como en movimiento [2], y en ambos artículos encuentra la función de distribución utilizando un procedimiento de maximización de la entropía [3]. Diecisiete años más tarde, en 1928, el mismo Jüttner encuentra las correspondientes distribuciones asociadas con las estadísticas cuánticas para gases relativistas [4].

Uno de los propósitos de la teoría cinética es derivar leyes macroscópicas con base en las ecuaciones de evolución microscópicas, esto se logra gracias al uso de la ecuación de Boltzmann [5]. En 1935 Walker dio el siguiente paso hacia la descripción del gas relativista encontrando la ecuación de evolución que debe satisfacer la función de distribución para el caso sin colisiones [6]. La generalización relativista de la ecuación de Boltzmann incluyendo colisiones fue dada por Lichnerowicz y Marrot en 1940 [7]. Taub mostró en [8] que las ecuaciones de balance de masa y energía-momento relativistas, pueden encontrarse a partir de las ecuaciones cinéticas. En su libro [9], Synge sintetiza los resultados más importantes para gases relativistas en equilibrio e introduce la notación vectorial 4-dimensional.

La década de 1960 fue muy importante y fértil para la teoría cinética relativista. Israel [10], Kelly [11] Chernikov [12] y otros autores [13, 14], adaptaron los métodos de Chapmann-Enskog y Grad al dominio de la relatividad. La aproximación BGK [15] fue implementada también en esta época al régimen relativista, primero por Marle [16] y modificada después por Anderson y Witting [17]. Con estos métodos se pudieron calcular los coeficientes de transporte para el gas relativista a partir de la ecuación de Boltzmann covariante. Una de las consecuencias más importantes en este caso es que el gas relativista tiene viscosidad volumétrica a diferencia del caso del gas no relativista. Este resultado tiene importantes repercusiones, por ejemplo en el efecto de la viscosidad de los neutrinos en la evolución del universo, el estudio de la formación de galaxias, estrellas de neutrones, etc. [18]. Una vez teniendo ecuaciones covariantes es directo estudiar la extensión que considere efectos de campos gravitacionales. La ecuación de Boltzmann relativista incluyendo estos efectos fue escrita primero por Chernikov [19] y Lindquist [20]. Posteriormente, Stewart [21] hace una descripción más general de la teoría cinética relativista en espacios curvos. Es en este trabajo, junto con el de Ehlers [22], donde se construye el formalismo matemático de la teoría cinética en el contexto de la relatividad general.

En su libro de 1980 [23] de Groot, van Leeuwen y van Weert estudian la deducción de la ecuación de Boltzmann a partir de la dinámica subyacente a un sistema de partículas cuánticas relativistas; esta dinámica es proporcionada por la teoría cuántica de campos. En ese trabajo se calculan los coeficientes de transporte para sistemas específicos que tienen un papel importante en astrofísica y cosmología. Aunque no estudian los efectos del campo gravitacional, sí presentan una serie de aplicaciones selectas. Carlo Cercignani y Gilberto M. Kremer en su libro [24], además de realizar una revisión de la teoría cinética relativista, estudian mezclas de gases relativistas en donde ocurren reacciones químicas o nucleares, analizan la propagación de ondas de choque en un gas relativista y el estudian el caso gravitacional, cosmológico y el sistema Vlasov-Einstein para plasmas. El más reciente tratado en la materia fue publicado en 2011 por Rémi Hakim, [25], donde hace uso de herramientas de la teoría cuántica de campos en espacio curvo donde además presenta diversas y recientes aplicaciones.

En la literatura hay distintas presentaciones de la teoría cinética relativista dependiendo del enfoque que se siga. Por ejemplo, se han propuesto alternativas a la distribución de Jüttner [26, 27, 28, 29]. Hay también intentos por establecer los fundamentos de la termodinámica irreversible relativista

sobre la base de una teoría cinética relativista de primer orden en los gradientes [30], y se han estudiado las inestabilidades genéricas en este tipo de teorías [31], mostrando que existen opciones estables que permiten introducir nuevos coeficientes de transporte [32]. Recientemente se desarrollaron simulaciones numéricas de dinámica molecular y Monte Carlo para el gas relativista que indican que la distribución de Jüttner es en realidad la generalización relativista correcta de la distribución del equilibrio [33, 34, 36, 37]. éstas también han sido confirmadas a través del estudio de las propiedades de transformación de la distribución en un lenguaje manifiestamente covariante [38]. Este análisis implica necesariamente la introducción de un vector cuya norma está asociada con la temperatura invariante del gas en el marco en reposo.

La teoría cinética relativista tiene una extensa gama de aplicaciones. Históricamente, el primero en utilizar la distribución de Jüttner para describir un sistema físico con buenos resultados confirmados observacionalmente, fue el astrofísico indio Subrahmanyan Chandrasekhar [39], quien desarrolló la teoría de la estructura estelar para estrellas en equilibrio y en estado estacionario. Chandrasekhar planteó un modelo para las enanas blancas como un gas de electrones relativistas fuertemente degenerados, siendo aplicable en ese régimen la versión cuántica para fermiones de la distribución de Jüttner. Con estas consideraciones Chandrasekhar encontró un límite para la masa de las enanas blancas, a saber, 1.4 masas solares, conocido ahora como el límite de Chandrasekhar, el cual se ha constatado debido a que hasta la fecha, no se han observado enanas blancas de masa superior [3].

En cosmología, al estudiar las épocas tempranas en la vida del universo es necesario considerar ciertos procesos disipativos. Bernstein [40] estudia la ecuación de Boltzmann en un fondo de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker, esta métrica describe un modelo de Universo en expansión, homogéneo e isotrópico. En ese trabajo se muestra que no existe solución de equilibrio para la función de distribución de un gas en esa situación. En el universo temprano las especies que existían eran todas relativistas, es evidente la necesidad de una teoría cinética relativista para investigar la evolución e interacciones entre las especies en esa época. En Cosmología usualmente se resuelve la ecuación de Boltzmann en un universo en expansión que contiene fotones, neutrinos y materia oscura [41, 42, 43].

Entre los posibles efectos estudiados por la teoría de transporte relativista, se encuentra el efecto Sunyaev-Zeldovich, que es la distorsión del espectro de cuerpo negro de la radiación cósmica

de fondo (RCF ó CMB del inglés *Cosmic Microwave Background*), producida por la dispersión de Compton de los fotones del fondo cósmico por electrones de los cúmulos de galaxias [44]. Ese proceso afecta la distribución de la radiación. Este efecto permite calcular parámetros cosmológicos como la constante de Hubble, el corrimiento al rojo, etc. Este efecto se ha intentado explicar a través de ecuaciones de difusión modificadas por efectos relativistas como la ecuación de Kompaneets que involucra procesos de difusión de fotones [45, 46]. Este efecto se estudió también utilizando expresiones corregidas para la intensidad de los fotones incidentes, encontrando los mismos resultados que Kompaneets [47]. Itho encontró modificaciones relativistas a este efecto [48], mostrando ser éstas muy pequeñas en relación con el caso no relativista. Es reciente la medición de la distribución de electrones asociados con el efecto Sunyaev-Zeldovich, de manera directa de la observación de aglomerados de galaxias con altas temperaturas, donde los efectos relativistas se vuelven importantes, resultando la distribución de Jüttner [49].

En épocas recientes se han construido grandes laboratorios donde se llevan a cabo experimentos de física nuclear basados en colisiones de iones pesados a altas velocidades. Tal es el caso del RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) y el LHC (Large Hadron Collider). En estas colisiones se encuentra el llamado plasma de quarks y gluones [50]. Las especies involucradas en estos experimentos son relativistas y por lo tanto es necesaria una base teórica para calcular los coeficientes de transporte correspondientes de estos sistemas. Se ha considerado que este sistema es el fluido relativista más perfecto que se ha podido observar, teniendo uno de los cocientes entre la viscosidad de corte y la densidad de la entropía más bajos [51].

Incorporar los principios de la relatividad con los de la teoría cinética no sólo es importante en el contexto de las anteriores aplicaciones, es crucial para entender los fundamentos teóricos de la descripción de sistemas relativistas de muchos cuerpos, donde no es claro cómo definir una variable temporal natural [21]. En termodinámica clásica no relativista, la descripción de los sistemas en equilibrio no está ligada con el movimiento del sistema mismo. Sin embargo, cuando extendemos el análisis al caso relativista especial, la descripción desde cualquier marco de referencia se vuelve imprescindible. Por ejemplo, en [52] se comienza a generalizar las leyes de la termodinámica a partir de principios de simetría y conservación y se observa la necesidad de incluir al movimiento del sistema.

Cien años han pasado desde la publicación de los trabajos originales de Ferencz Jüttner y nos damos cuenta que el área que él inauguró con ellos, sigue siendo un tema de interés en la actualidad con potenciales aplicaciones modernas importantes. Por todo esto consideramos fundamental el conmemorar los cien años de la aparición de los trabajos pioneros de Ferencz Jüttner y lo hacemos con la edición del presente volumen en el cual contribuyeron varios investigadores mexicanos y extranjeros que han dedicado parte de su trabajo al estudio de la teoría cinética y termodinámica en sistemas relativistas. Los capítulos incluyen temas como la estabilidad de las ecuaciones hidrodinámicas relativistas de primer orden, la implementación numérica de las ecuaciones de dinámica molecular en el régimen relativista, la función de distribución manifiestamente covariante para el gas relativista, la transformación relativista de la temperatura, estudios de mezclas binarias de sistemas relativistas, flujos de calor en sistemas gravitacionales y astrofísicos, condensados de Bose-Einstein, etc. Además, quisimos incluir, a modo de apéndice, una pequeña semblanza de la vida y obra de Ferencz Jüttner, así como las versiones en español de sus trabajos originales de 1911, que incluyen la derivación original de la distribución del equilibrio del gas relativista. Con este compendio esperamos recopilar algunos de los resultados recientes más importantes que se han dado a cien años de iniciada la teoría cinética relativista.

Los editores

Bibliografía

- [1] F. Jüttner, *Ann. Physik* **339** (1911) 856.
- [2] F. Jüttner, *Ann. Physik* **340** (1911) 145.
- [3] I. Müller, *A History of Thermodynamics*, (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2007).
- [4] F. Jüttner, *Zeitschr. Phys.* **47** (1928) 542.
- [5] S. Chapman and T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. 3th ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1970).
- [6] A. G. Walker, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **2**, 238 (1934-36).
- [7] A. Lichnerowicz and R. Marrot, *Compt. Rend. Acad. Sci.* **210**, 759 París (1940). R. Marrot, *J. Math Pures et Appl.* **25**, 93 (1946).
- [8] A. H. Taub, *Phys. Rev.* **74** (1948) 328.

- [9] J. L. Synge, *The Relativistic Gas*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1957).
- [10] W. Israel, *Relativistic Kinetic Theory of a simple gas*. J. Math. Phys. **4**, 1163-1181 (1963).
- [11] D. C. Kelly, *The Kinetic Theory of a Relativistic Gas*. Unpublished Report. Miami University, Oxford (1963).
- [12] N. A. Chemikov, Acta Phys. Pol. **27** (1964) 465.
- [13] S. R. de Groot, C. G. van Weert, W. Th. Hermens and W. A. van Leeuwen, Physica **40** (1968) 257; **42** (1969) 309. C. Marle, Ann. Inst. Henri Poincare **A10** (1969) 67. B. Vignon, Ann. Inst. Henri Poincare **A10** (1969) 31.
- [14] C. Møller, *The Theory of Relativity*, (Clarendon Press Oxford 1972). G. Neugebauer *TRelativistische Thermodynamik*, (Akademic-Verlag, Berlin 1980).
- [15] P. Bhatnagar, E. Gross and M. Krook, Phys. Rev. **94** (1954), 511.
- [16] C. Marle, C. R. Acad. Sc. Paris **260** (1965), 6539.
- [17] J. L. Anderson and H. R. Witting, Physica **74** (1974), 489.
- [18] C. W. Misner, Ap. J. **151** (1968) 431. A. G. Doroshkevich, Ya. B. Zeldo'vich and I. D. Novikov, Astrofizika **5** (1969) 539. S. Weinberg, Ap. J. **168** (1971) 175.
- [19] N. A. Chernikov, *The Relativistic Gas in the Gravitational Field*. Acta Phys. Pol. **23** 629-645 (1963).
- [20] R. W. Lindquist, *Relativistic Transport Theory*. Annals of Physics **37**, 487-518 (1966).
- [21] J. M. Stewart, *Non-equilibrium relativistic kinetic theory*. Lecture Notes in Physics Vol. 10 Springer, Heidelberg (1971).
- [22] J. Ehlers, *General Relativity and Kinetic Theory* en los *Proceedings of the International School of Physics, Enrico Fermi* pág. 1-70, Ed. R. K. Sach, Academic Press (1971).
- [23] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen and Ch. G. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory*. North-Holland, Amsterdam (1980).
- [24] C. Cercignani and G. M. Kremer, *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*. Progress in Mathematical Physics Vol. 22 Springer-Verlag, Birkhäuser, Basel, (2002).
- [25] R. Hakim, *Introduction to relativistic statistical mechanics: Classical and Quantum*. World Scientific Publishing Co., Singapoure, (2011).
- [26] L. P. Horwitz, S. Shashoua, and W. C. Schieve, Physica A **161**, 300 (1989).
- [27] E. Lehmann, J. Math. Phys. **47**, 023303 (2006).

-
- [28] J. Dunkel, P. Talkner and P. Hänggi, *New J. Phys.* **9**, 144 (2007).
- [29] J. Dunkel and P. Hänggi, *Phys. Rev. E* **71**, 016124 (2005).
- [30] A. Sandoval-Villalbaz, A. L. García-Perciante and L. S. García-Colín, *AIP Conf. Proc.* **1122**, 388 (2009).
- [31] A. L. Garcia-Perciante, L. S. Garcia-Colin, A. Sandoval-Villalbaz, *Gen Relativ Gravit* **41** (2009) 1645–1654.
- [32] A. Sandoval-Villalbaz, A. L. Garcia-Perciante, L. S. Garcia-Colin, *Physica A* **388** (2009) 3765-3770.
- [33] D. Cubero, J. Casado-Pascual, J. Dunkel, P. Talkner and P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 170601 (2007).
- [34] A. Montakhab, M. Ghodrat, and M. Barati, *Phys. Rev. E* **79**, 031124 (2009).
- [35] A. Aliano, L. Rondoni and G. P. Morriss, *Eur. Phys. J. B* **50**, 361 (2006).
- [36] F. Peano, M. Marti, L. O. Silva and G. Coppa, *Phys. Rev. E* **79**, 025701(R) (2009).
- [37] J. Dunkel, P. Hänggi and S. Hilbert, *Nature Phys.* **5**, 741 (2009).
- [38] G. Chacón-Acosta, L. Dagdug and H. Morales-Técotl, *Manifestly covariant Jüttner distribution and equipartition theorem*, *Phys. Rev. E* **81**, 021126 (2010).
- [39] S. Chandrasekar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. (Dover Publications Inc., 1958).
- [40] J. Bernstein, *Kinetic Theory in the Expanding Universe*. Paperback Ed. (Cambridge University Press 2004).
- [41] A. R. Liddle, D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large Scale Structure*, (Cambridge University Press 2000).
- [42] J. A. Peacock, *Cosmological Physics*, (Cambridge University Press 1999).
- [43] E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*. Paperback Ed. (Westview Press 1994).
- [44] R. A. Sunyaev and Y.B. Zeldovich, *Comments Astrophys. Space Phys.* **4**, 173 (1972); M. Jones *et al.*, *Nature (London)* **365**, 320 (1993); M. Birkinshaw, S. F. Gull, and H. Hardebeck, *Nature (London)* **309**, 34 (1984).
- [45] A. S. Kompannets, *Sov. Phys.-JETP* **4**, 730 (1957).
- [46] Z. Haba, *Linearized Kompaneets equation as a relativistic diffusion*. *Mod. Phys. Lett. A* **24**, 3193-3203 (2009).

1.0. Bibliografía

- [47] A. Sandoval-Villalvazo and L. S. García-Colín, *J. Phys. A: Math. Gen* **36** (2003) 4641; A. Sandoval-Villalvazo and L. S. García-Colín, *Gen. Relativ. Gravit.* **37** (2005) 831.
- [48] N. Itoh, Y. Kohyama, S. Nozawa, *Relativistic corrections to the Sunyaev-Zeldovich effect for clusters of galaxies*. *Astrophys. J.* **502**, 7-15 (1998).
- [49] D. A. Prokhorov, S. Colafrancesco, T. Akahori, K. Yoshikawa, S. Nagataki, and K.-I. Seon, *A&A*, **529** (2011) A39.
- [50] P. Huovinen and D. Molnar, *Phys. Rev. C* **79**, 014906 (2009); W. Florkowski, W. Broniowski, M. Chojnacki and A. Kisiel, *Acta Phys. Polon. B* **40** 1093 (2009); H. van Hees, V. Greco, and R. Rapp, *Phys. Rev. C* **73**, 034913 (2006).
- [51] R. S. Bhalerao, *Pramana J. Phys.* **75** (2010) 247; R. Kuiper and G. Wolschin, *Ann. Phys. (Leipzig)* **16** (2007) 67.
- [52] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. John Wiley and Sons Inc. (1985).

Confirmación de la distribución de Jüttner por medio de experimentos numéricos y parametrizaciones de tiempo propio

David Cubero

Departamento de Física Aplicada I, EUP, Universidad de Sevilla, Calle Virgen de África 7, 41011 Sevilla, España.

dcubero@us.es

Resumen

Las simulaciones de una mezcla bicomponente unidimensional, siendo completamente relativistas, pusieron fin a una disputa que duró varios años sobre la exactitud de la función de Jüttner para describir la distribución de velocidades de las partículas de un gas relativista. Además, estas simulaciones sirven también para ilustrar el significado de conceptos tales como temperatura, equilibrio térmico y ergodicidad en el marco de la relatividad especial. Aún más, han mostrado que la distribución de Jüttner modificada, la cual se propuso originalmente como alternativa a la distribución de Jüttner, en realidad se corresponde con la distribución de equilibrio cuando se utiliza una parametrización basada en el tiempo propio de las partículas. Esta parametrización lleva a una energía y momento del gas que se transforman como las componentes de un cuadrivector, con lo que permite definir una teoría termodinámica relativista que carece de las ambigüedades de las teorías tradicionales de Einstein-Planck y Ott.

2.1. Introducción

Se puede afirmar que la física estadística relativista dio sus primeros pasos en 1911, seis años después de que Albert Einstein formulara la teoría de la relatividad especial [1, 2], cuando Ferencz Jüttner [3] propuso su generalización relativista de la distribución de velocidades de Maxwell [4].

Durante estos 100 años, la física estadística relativista se ha encontrado con muchas dificultades, ausentes en el mundo Newtoniano pre-relativista, que han dado pie a diversas controversias recurrentes en la comunidad científica. Una de las más recientes ha sido precisamente la exactitud de la distribución de Jüttner, puesta en duda por diversos autores a partir de los años 80 [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12], en un debate que sólo se cerró en 2007 [13] con los experimentos numéricos que detallamos en este capítulo.

La principal dificultad de la física estadística relativista estriba en la complicación introducida por los principios de la relatividad especial en la descripción matemática de las interacciones de muchas partículas. En la física no relativista, las interacciones pueden describirse por medio de potenciales o hamiltonianos, que suponen una velocidad infinita de propagación. A partir de los hamiltonianos se construye la mecánica estadística no relativista siguiendo una serie de pasos matemáticos [14] que, aunque no siempre completamente rigurosos, como el principio de probabilidades a priori, están bien asentados y contrastados. No obstante, estos hamiltonianos no pueden ser utilizados en la física relativista, ya que la relatividad especial prohíbe velocidades de propagación superiores a las de la luz. Las interacciones tienen entonces que ser descritas por medio de campos que intercambian energía y momento con las partículas. Estos campos introducen una serie de complicaciones [15, 16, 17, 18, 19] que hacen prácticamente intratable la tarea de desarrollar un formalismo hamiltoniano de partículas sin campos que pueda ser utilizado en la mecánica estadística relativista [20].

La teoría cinética proporciona herramientas tales como la ecuación de Boltzmann, que pueden generalizarse sin grandes dificultades al marco de la relatividad especial [21]. No obstante, estas teorías contienen aproximaciones, como la famosa hipótesis del *caos molecular* en la ecuación de Boltzmann o la de ergodicidad a un nivel más fundamental, que, si bien han sido debidamente contrastadas por simulaciones y experimentos en el caso no relativista, deben también confirmarse dentro de la relatividad especial, pues ésta modifica de manera fundamental los conceptos de espacio y tiempo.

El capítulo está organizado como sigue. En primer lugar se resumen una serie de definiciones y conceptos necesarios para las secciones siguientes. En la siguiente sección se expone una deducción de la distribución de Jüttner que, siendo muy próxima a la deducción original de Jüttner de 1911, nos permite también introducir rápidamente la llamada *distribución de Jüttner modificada*. Esta distribución fue originalmente propuesta como una alternativa a la de Jüttner [10, 12], y a partir de ella se pueden obtener resultados que coinciden parcialmente con los obtenidos en los mencionados trabajos [5, 6, 7] que cuestionaban la distribución de Jüttner. A continuación, se detallan las simulaciones completamente relativistas que mostraron [13] inequívocamente que la distribución de Jüttner describe correctamente la distribución de velocidades en un gas relativista cuando se utiliza la parametrización temporal natural del marco de referencia inercial en el que

se miden las velocidades. Estas simulaciones [22] también sirven para ilustrar el significado de conceptos tales como *temperatura* y *equilibrio térmico* en el marco de la relatividad especial. La última sección muestra que el concepto de *ergodicidad* también es aplicable en relatividad especial. Una importante esto es que la distribución de Jüttner modificada, a pesar de no ser adecuada para describir las velocidades de un gas en equilibrio cuando se miden simultáneamente en un marco de referencia inercial, es de utilidad para la distribución de velocidades de partículas que tienen una vida finita en procesos de decaimiento. Además, mostraremos que puede ser utilizada para construir una *termodinámica relativista* basada en el *tiempo propio* que no posee las ambigüedades de las teorías tradicionales de Einstein y Planck o de Ott.

2.2. Preliminares

En relatividad especial, los eventos espacio-temporales en un marco de referencia inercial Σ se suelen caracterizar por cuadvectores definidos en el espacio de Minkowski,

$$x^\alpha = (ct, \mathbf{x}) = (ct, x^1, \dots, x^d), \quad (2.1)$$

donde d es el número de dimensiones espaciales del sistema y α es un superíndice que toma valores $0, 1, \dots, d$. En lo sucesivo adoptaremos unidades naturales, de forma que la velocidad de la luz $c = 1$. Las transformaciones entre las coordenadas de distintos marcos de referencia inerciales vienen descritas por la matriz de Lorentz

$$x'^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha x^\beta, \quad (2.2)$$

donde x'^α son las coordenadas en el marco Σ' , y se ha considerado, sin pérdida de generalidad, que ambos marcos comparten el mismo origen de coordenadas. Por ejemplo, si (en un espacio de dimensión $d = 3$) el marco Σ' se está alejando con velocidad constante u a lo largo del eje x , entonces tenemos

$$t' = \gamma(u)(t - ux) \quad (2.3)$$

$$x' = \gamma(u)(x - ut) \quad (2.4)$$

$$y' = y \quad (2.5)$$

$$z' = z \quad (2.6)$$

donde $\gamma(u) = (1 - u^2)^{-1/2}$ es el factor de Lorentz.

El cuadvector energía-momento de una partícula de masa en reposo m que se mueve con velocidad \mathbf{v} en Σ se define como

$$p^\alpha = (p^0, \mathbf{p}), \quad (2.7)$$

donde

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\gamma(\mathbf{v}), \quad p^0 = m\gamma(\mathbf{v}), \quad (2.8)$$

2.2. Preliminares

y $\gamma(v) = (1 - v^2)^{-1/2}$. Invertiendo estas fórmulas, podemos expresar la velocidad de la partícula en función de su momento \mathbf{p} y su masa en reposo m por medio de

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}/p^0, \quad p^0 = (m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}. \quad (2.9)$$

Como las componentes de (2.7) forman un cuadrivector, estas se transforman para distintos observadores con la misma matriz de Lorentz que en (2.2). Una importante consecuencia de esto es que el elemento de volumen en el espacio de momentos $d^d p$ se transforma como

$$d^d p'/p'^0 = d^d p/p^0. \quad (2.10)$$

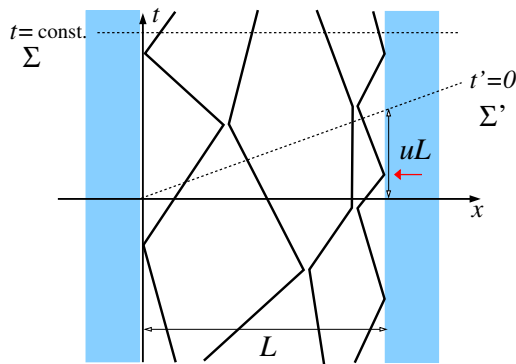


Figura 2.1: Líneas de mundo de cuatro partículas en una caja de dimensión L . Las líneas discontinuas indican los hiper-planos a $t = \text{constante}$ y $t' = \text{constante}$, donde t y t' son las coordenadas temporales de un marco Σ en reposo con la caja y otro Σ' que se mueve con velocidad u a lo largo del eje x , respectivamente. Nótese, por ejemplo, que el hiper-plano con $t' = 0$ se corresponde con instantes de tiempo que se encuentran en el futuro con respecto a $t = 0$, de forma más acentuada a medida que nos separamos de la pared izquierda, escogida como origen de ambos marcos de referencia. Obsérvese que la función de distribución medida en Σ' para $t' = 0$ difiere de la de $t = 0$ no sólo por la evolución libre de las partículas en instantes distintos, sino también por la colisión que experimenta la cuarta partícula con la pared de la derecha.

A continuación, consideremos un gas relativista de N partículas cuyas trayectorias en un marco de referencia inercial arbitrario Σ vienen descritas por las funciones $\mathbf{X}_i(t)$, con $i = 1, 2, \dots, N$. Entonces, se define la *función de distribución de una partícula en el espacio fásico* en Σ como

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_i(t)), \quad (2.11)$$

donde $\mathbf{P}_i(t)$ es el momento de la partícula i , el cual se puede obtener a partir de $\mathbf{X}_i(t)$ utilizando (2.8). Esta función describe la densidad de probabilidad de encontrar una partícula en \mathbf{x} con

momento \mathbf{p} en el instante t , con lo que es evidente que satisface la condición de normalización

$$1 = \int d^d x d^d p \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \quad (2.12)$$

Nótese que la integral en (2.12) debe realizarse en el hiper-plano definido por $t = \text{constante}$, siendo t la coordenada temporal del marco Σ . Esta observación es importante, ya que en un marco de referencia Σ' que se mueva con velocidad constante con respecto a Σ , la función de distribución Φ' se define en el hiper plano $t' = \text{constante}$, que es completamente diferente del anterior debido a la pérdida de simultaneidad característica de la relatividad especial. Como se ilustra en la figura 2.1, ambos hiper planos se refieren a instantes de tiempo distintos, de forma que lo que es simultáneo en Σ' no lo es en Σ .

No obstante, puede probarse que la función de distribución de una partícula en el espacio fásico (2.11) se transforma como un escalar de Lorentz, es decir, la función de distribución en un marco de referencia arbitrario Σ' viene dada por

$$\Phi'(\mathbf{x}', \mathbf{p}', t') = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (2.13)$$

donde $(\mathbf{x}', \mathbf{p}', t')$ y $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ están conectados por transformaciones de Lorentz (2.2). Este resultado no es trivial, aunque sí general, ya que se puede probar utilizando simplemente el hecho que las trayectorias de cada partícula son únicas, después de una reparametrización en términos de los tiempos propios de las mismas [23], independientemente de la naturaleza de las interacciones entre las partículas. Hay que resaltar que con frecuencia se encuentran en la literatura *demonstraciones* de (2.13) que son incorrectas, basadas en la hipótesis (errónea) de que $d^d x d^d p$ es un invariante de Lorentz, véase por ejemplo [24].

A partir de la distribución en el espacio fásico Φ , se puede definir en cualquier marco de referencia inercial la *distribución marginal de momentos*, o simplemente *distribución de momentos*, como

$$\phi(\mathbf{p}, t) = \int d^d x \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (2.14)$$

función que, a partir de (2.12), está siempre normalizada a la unidad

$$1 = \int d^d p \phi(\mathbf{p}, t). \quad (2.15)$$

En general, si no se conoce Φ con detalle, no es posible obtener la distribución de momentos $\phi'(\mathbf{p}', t')$ en un marco de referencia arbitrario Σ' a partir del conocimiento de $\phi(\mathbf{p}, t)$ en Σ . Luego no se puede escribir una ley de transformación similar a (2.13) para la distribución de momentos que sea válida en todos los casos.

Una excepción a esta regla es la distribución estacionaria de momentos de un sistema espacialmente homogéneo. En ese caso, en un marco de referencia Σ_0 en reposo con el gas, la función de distribución en el espacio fásico se puede escribir como

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{\theta(\mathbf{x})}{V} \phi(\mathbf{p}), \quad (2.16)$$

donde V es el volumen que ocupa el gas en Σ_0 y $\theta(\mathbf{x})$ es una función que es 1 si \mathbf{x} está dentro del recipiente que contiene el gas y 0 en caso contrario. Utilizando (2.13) se llega fácilmente a la *ley de transformación para sistemas confinados espacialmente homogéneos*

$$\frac{\phi'(\mathbf{p}')}{V'} = \frac{\phi(\mathbf{p})}{V}, \quad (2.17)$$

donde ϕ' denota la distribución de momentos en un marco inercial arbitrario Σ' (y por tanto medida simultáneamente a $t' = \text{constante}$) y $V' = V/\gamma(\mathbf{u})$ denota el volumen contraído observado por Σ' , siendo \mathbf{u} la velocidad con que se mueve este marco de referencia respecto de Σ_0 . Nótese que la presencia de confinamiento altera las propiedades de transformación de la distribución de momentos en (2.17), lo cual no ocurre en la física no relativista –donde no hay contracción de Lorentz de las longitudes. El motivo último es que en relatividad especial las observaciones entre distintos marcos de referencia no se pueden sincronizar, y en el intervalo de tiempo entre sus observaciones varias partículas colisionan con las paredes del recipiente [23], como se muestra en la figura 2.1. Este fenómeno ocurre con todas las variables físicas globales, como la energía o el momento total del gas, ya que están definidas no sobre un punto del espacio-tiempo sino sobre regiones que contienen más de un evento del espacio-tiempo, y es el origen de la confusión que hubo durante muchos años sobre la termodinámica relativista, como discutiremos más adelante.

Un ejemplo de función de distribución de momentos de un sistema homogéneo es la conocida *distribución de Maxwell-Boltzmann*, que describe la distribución de un gas monoatómico no relativista en equilibrio termodinámico,

$$\phi_M(\mathbf{p}) = (2\pi m k_B T)^{-d/2} \exp\left(-\frac{p^2}{2m k_B T}\right), \quad (2.18)$$

donde T es la temperatura del gas, k_B es la constante de Boltzmann y m la masa de cada partícula. No obstante, este no es buen ejemplo en relatividad especial, ya que permite velocidades superiores a la de la luz. Pero sí es un buen punto de partida, ya que en el límite de velocidades pequeñas (límite de baja temperatura), cualquier distribución de momentos relativista que describa un gas en equilibrio debe reducirse asintóticamente a esta distribución, ya que esta describe adecuadamente la distribución de momentos de una partícula de un sistema no relativista en equilibrio termodinámico.

Por último, podemos definir la *distribución de velocidades de una partícula f* a partir de la distribución de momentos ϕ , en cualquier marco de referencia Σ , con un simple cambio de variable, ya que esta debe cumplir

$$d^d p \phi(\mathbf{p}, t) = d^d v f(\mathbf{v}, t). \quad (2.19)$$

A partir de (2.8) se obtiene $d^d p = m^d \gamma(\mathbf{v})^{d+2} d^d v$, con lo que finalmente

$$f(\mathbf{v}) = m^d \gamma(\mathbf{v})^{d+2} \phi(\mathbf{p}, t). \quad (2.20)$$

2.3. Deducción de la distribución de Jüttner

La deducción original de Jüttner de 1911 [3] para la distribución de velocidades de un gas relativista se basa en el principio de máxima entropía. Si bien esta es una deducción heurística que depende de la definición de la entropía utilizada¹, este método nos permite introducir de forma rápida dicha distribución, así como una de las alternativas que se propusieron recientemente, la llamada distribución de Jüttner modificada [12].

Consideremos un gas de N partículas idénticas en un recipiente tal que la energía total \mathcal{E} del gas se conserva en el marco de referencia inercial Σ_0 en reposo con el recipiente. La distribución de momentos del gas en equilibrio $\phi(\mathbf{p})$ debe ser la función que maximiza la siguiente funcional de entropía relativa [12]:

$$S[\phi|\rho] = - \int d^d p \phi(\mathbf{p}) \ln \left[\frac{\phi(\mathbf{p})}{\rho(\mathbf{p})} \right], \quad (2.21a)$$

con las ligaduras

$$1 = \int d^d p \phi(\mathbf{p}), \quad (2.21b)$$

$$\frac{\mathcal{E}}{N} = \int d^d p \phi(\mathbf{p}) p^0, \quad (2.21c)$$

donde $d = 1, 2, 3$ es la dimensión espacial, \mathcal{E}/N es la energía media por partícula y $p^0 = (m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$ es la energía relativista de una partícula con masa en reposo m y momento lineal \mathbf{p} . La función $\rho(\mathbf{p}) > 0$ en la ecuación (2.21a) juega el papel de una densidad de referencia [28, 29, 30, 31, 32], asegurando que el argumento del logaritmo es adimensional.

Jüttner supuso en 1911 una densidad de referencia constante,

$$\rho_t(\mathbf{p}) = \rho_0, \quad (2.22)$$

a partir de la cual se obtiene la hoy en día conocida *distribución de Jüttner* de momentos:

$$\phi_J(\mathbf{p}; \beta) = Z_J^{-1} \exp(-\beta p^0), \quad (2.23)$$

donde Z_J es una constante de normalización y β otra constante que debe depender de la temperatura del gas. En el límite no relativista, la velocidad cuadrática media de las partículas debe ser muy pequeña, lo cual se consigue tomando el límite asintótico $\beta \rightarrow \infty$. Tomando este límite y comparando con la distribución de Maxwell-Boltzmann (2.18), se obtiene $\beta = 1/(k_B T)$, donde T es la temperatura del gas y k_B es la constante de Boltzmann.

Por otro lado, como el parámetro β se introduce como un multiplicador de Langrange necesario para la ligadura de energía (2.21c), también se puede encontrar su valor en función de la energía

¹Siendo preferible una más fundamentada como la que se sigue de la ecuación de Boltzmann [21] o la que utiliza una aproximación hamiltoniana en el colectivo micro-canónico [25, 26, 27]

2.3. Deducción de la distribución de Jüttner

del gas. Insertando ϕ_J en la ligadura de energía (2.21c) y denotando por \mathcal{E}_0 la energía total del sistema medida en Σ_0 , se obtiene

$$\frac{\mathcal{E}_0}{N} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_J, \quad (2.24)$$

$$Z_J = 2m^d \left(\frac{2\pi}{\beta m} \right)^{(d-1)/2} K_{(d+1)/2}(\beta m), \quad (2.25)$$

donde $K_n(z)$ denota la n -ésima función de Bessel modificada de segunda clase [33]. Particularizando para las distintas dimensiones espaciales tenemos:

$$Z_J = \begin{cases} 2mK_1(\beta m) & d = 1, \\ 2\pi \exp(-\beta m)(1 + \beta m)/\beta^2 & d = 2, \\ 4\pi m^2 K_2(\beta m)/\beta & d = 3. \end{cases} \quad (2.26)$$

y

$$\frac{\mathcal{E}_0}{N} = m \frac{K_{(3+d)/2}(\beta m)}{K_{(1+d)/2}(\beta m)} - \frac{1}{\beta} = \begin{cases} m \frac{K_0(\beta m) + K_2(\beta m)}{2K_1(\beta m)} & d = 1, \\ \frac{2}{\beta} + \frac{m^2\beta}{1+m\beta} & d = 2, \\ \frac{3}{\beta} + m \frac{K_1(\beta m)}{K_2(\beta m)} & d = 3. \end{cases} \quad (2.27)$$

En el límite ultra-relativista, es decir, de energías muy altas, se obtiene

$$\frac{\mathcal{E}_0}{N} \sim \frac{d}{\beta} \quad (T \rightarrow \infty). \quad (2.28)$$

Mientras que en el límite asintótico de bajas temperaturas (límite no relativista) se obtiene

$$\frac{\mathcal{E}_0}{N} \sim m + d/(2\beta) \quad (T \rightarrow 0), \quad (2.29)$$

resultado que coincide con el conocido teorema de equipartición de la física estadística no relativista. A partir de (2.23) se puede también calcular un resultado exacto análogo al teorema de equipartición, pero válido para cualquier valor de la temperatura [34]:

$$\langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \rangle_t = \langle \mathbf{p}^2 / p^0 \rangle_t = d/\beta, \quad (2.30)$$

donde los brakets $\langle \cdot \rangle_t$ denotan valores medios con la distribución de Jüttner (2.23).

2.3.1. La distribución de Jüttner modificada

Si en vez de suponer una densidad de referencia constante suponemos

$$\rho_\tau(\mathbf{p}) \propto 1/p^0, \quad (2.31)$$

obtenemos la *distribución de Jüttner modificada* de momentos:

$$\phi_{\text{MJ}}(\mathbf{p}; \beta) = Z_{\text{MJ}}^{-1} \phi_{\text{J}}(\mathbf{p}; \beta) / p^0. \quad (2.32)$$

A partir de la ecuación (2.10), es claro que

$$d\nu = \frac{d^d p}{p^0} \quad (2.33)$$

define una medida de integración invariante en el espacio de momentos relativista, con lo que la entropía relativa (2.21a) asociada a esta densidad de referencia está bien definida. Operando de forma similar a lo anterior, se obtiene

$$\frac{\mathcal{E}_\tau}{N} = \frac{Z_{\text{J}}}{Z_{\text{MJ}}}, \quad (2.34)$$

$$Z_{\text{MJ}} = 2m^{d-1} \left(\frac{2\pi}{\beta m} \right)^{(d-1)/2} K_{(d-1)/2}(\beta m), \quad (2.35)$$

lo cual implica

$$Z_{\text{MJ}} = \begin{cases} 2K_0(\beta m) & d = 1, \\ 2\pi \exp(-\beta m) / \beta & d = 2, \\ 4\pi m K_1(\beta m) / \beta & d = 3. \end{cases} \quad (2.36)$$

y

$$\frac{\mathcal{E}_\tau}{N} = m \frac{K_{(1+d)/2}(\beta m)}{K_{(d-1)/2}(\beta m)} = \begin{cases} m \frac{K_1(\beta m)}{K_0(\beta m)} & d = 1, \\ m + \frac{1}{\beta} & d = 2, \\ m \frac{K_2(\beta m)}{K_1(\beta m)} & d = 3. \end{cases} \quad (2.37)$$

En estas ecuaciones hemos denotado la energía del gas como \mathcal{E}_τ para distinguirla de la obtenida con la distribución de Jüttner, pues al ser distribuciones distintas llevan a valores distintos. En la última sección del capítulo veremos que \mathcal{E}_0 es la energía del gas en equilibrio medida simultáneamente en un marco de referencia en reposo con el recipiente que contiene el gas, mientras que \mathcal{E}_τ es la

2.3. Deducción de la distribución de Jüttner

energía del gas en el mismo marco de referencia cuando se mide igualando los instantes propios de cada partícula².

En el límite no relativista, tanto la distribución de Jüttner como la Jüttner modificada llevan a la distribución de Maxwell-Boltzmann (2.18), por lo que en ambos casos debe inferirse la misma relación con la temperatura $\beta = 1/(k_B T)$. En consecuencia, \mathcal{E}_τ presenta el mismo comportamiento asintótico (2.29) en el límite no relativista. En el límite ultra-relativista se obtiene

$$\frac{\mathcal{E}_\tau}{N} \sim \frac{d-1}{\beta} \quad (T \rightarrow \infty). \quad (2.38)$$

En general, la función de Jüttner modificada exhibe una población de partículas considerablemente menor que la de Jüttner en la cola de alta energía debido al prefactor adicional $1/p^0$.

Nótese que en un espacio bidimensional, la energía media por partícula dada por la distribución de Jüttner modificada, ecuación (2.37), coincide exactamente con el teorema de equipartición no relativista para cualquier valor de la temperatura. Esta coincidencia sólo se cumple para $d = 2$, pero no para $d = 1, 3$.

Todas estas expresiones son válidas en el marco de referencia Σ_0 en reposo con el recipiente que contiene el gas. En las secciones siguientes estudiaremos las leyes de transformación de estas distribuciones para observadores en movimiento. En concreto, se verá que la distribución de Jüttner modificada presenta una ventaja considerable en este aspecto, ya que la energía total del gas \mathcal{E}_τ junto con el momento total (cero en Σ_0) forman las componentes de un cuadrivector, mientras que las correspondientes magnitudes asociadas a la distribución de Jüttner no lo hacen.

Para finalizar, es conveniente resaltar que la principal diferencia de la deducción expuesta en este capítulo con la llevada a cabo originalmente por Jüttner radica en que él consideró la funcional de entropía definida en el espacio fásico $\{(\mathbf{x}, \mathbf{p})\}$ de una partícula, mientras que nosotros nos hemos restringido al espacio de momentos $\{\mathbf{p}\}$, aunque esto no introduce ningún cambio significativo, ya que la parte espacial de la función de distribución es trivial. Sí que podría argumentarse, sin embargo, que la distribución de Jüttner es más elegante que la de Jüttner modificada, pues la densidad relativa asociada a la funcional de entropía, la densidad relativa constante, es la única medida definida sobre todo el espacio de trabajo que es invariante tanto en el espacio fásico como en el de momentos. No obstante, este no es un argumento contundente, ya que, en cualquier caso, la deducción, como la basada en la ecuación de Boltzmann o en la aproximación hamiltoniana, se basa en suposiciones que, aún siendo plausibles, podrían no cumplirse en relatividad especial.

²Se podría pensar ingenuamente que ambas debían ser iguales dado que se corresponden con la misma solución *estacionaria* de equilibrio, pero la relatividad del tiempo, propia de la relatividad espacial, lo impide, como se muestra en la última sección del capítulo.

2.4. Verificación numérica de la distribución de Jüttner

Al principio del siglo XIX, había común acuerdo en que la distribución de velocidades de un gas en equilibrio estaba bien descrita por la función de distribución de Maxwell

$$f_M(\mathbf{v}; m, \beta) = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{\beta m \mathbf{v}^2}{2}\right), \quad (2.39)$$

donde $\beta = 1/(k_B T)$. En la figura 2.2 se ha representado esta distribución para varios gases monoatómicos a la temperatura ambiente.

No obstante, cuando Einstein [1, 2] formuló la teoría de relatividad especial en 1905, Planck y otros notaron inmediatamente que f_M estaba en conflicto con el postulado fundamental relativista, que afirma que la velocidad de cualquier partícula no puede exceder la velocidad de la luz. En la sección anterior hemos visto la generalización relativista propuesta por Jüttner, ecuación (2.23), la cual traducida para las velocidades (2.20) queda

$$f_J(\mathbf{v}; m, \beta_J) = \frac{m^d}{Z_J} \gamma(\mathbf{v})^{2+d} \exp[-\beta_J m \gamma(\mathbf{v})], \quad |\mathbf{v}| < 1. \quad (2.40)$$

La distribución de Jüttner estuvo ampliamente aceptada durante los tres primeros cuartos del siglo XX, aunque no había una demostración rigurosa debido a la dificultad de formular una mecánica hamiltoniana de partículas interaccionantes que sea consistente con los principios de relatividad especial [15, 16, 17, 18, 19, 20]. En la década de los ochenta empezaron a aflorar algunas dudas cuando Horwitz y colaboradores [5, 6] propusieron una ecuación de Boltzmann relativista que describieron como *manifestamente covariante*. La solución estacionaria de esta ecuación difiere de la ecuación (2.40), y en concreto, predice una diferente relación energía-temperatura en el límite ultra-relativista $T \rightarrow \infty$ [7]. Posteriormente, resultados y propuestas parcialmente contradictorias de otros autores, [8, 9, 10, 11, 12], aumentaron considerablemente la confusión sobre cuál era la distribución que correctamente generaliza la función maxwelliana (2.39). Por ejemplo, ya hemos visto en la sección anterior la distribución de Jüttner modificada (2.32), introducida en [9, 10], que predice

$$f_{MJ}(\mathbf{v}; m, \beta_{MJ}) = \frac{m^d}{Z_{MJ}} \frac{\gamma(\mathbf{v})^{2+d}}{m \gamma(\mathbf{v})} \exp[-\beta_{MJ} m \gamma(\mathbf{v})], \quad |\mathbf{v}| < 1. \quad (2.41)$$

Ya hemos comentado en la sección anterior que, a los mismos valores de los parámetros $\beta_J = \beta_{MJ} \lesssim 1/m$, la función de Jüttner modificada exhibe una población de partículas considerablemente menor en la cola de alta energía en comparación con f_J debido al prefactor adicional $1/m \gamma(\mathbf{v})$.

La identificación de la función de distribución de velocidades correcta es esencial para la adecuada interpretación de experimentos en altas energía y astrofísica [35, 36, 37, 38]. Algunos ejemplos incluyen la aplicación de ecuaciones de Langevin relativistas [39, 40, 41] a los experimentos de colisiones de iones pesados [38, 37], procesos de termalización en plasmas ultra-relativistas [36], o el efecto relativista Sunyaev-Zel'dovich [35], que describe la distorsión del espectro de radiación de fondo cósmica debido a la interacción de los fotones CMB con electrones calientes en cúmulos de galaxias [42, 43, 44]. La intensidad predicha de estas distorsiones espectrales y los parámetros

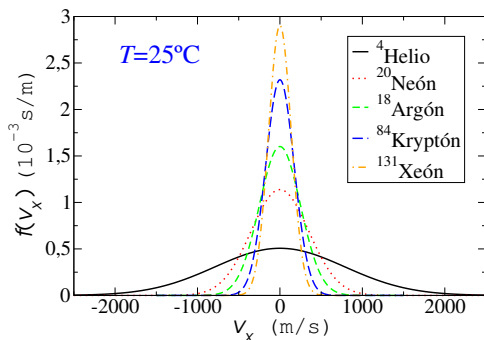


Figura 2.2: Función de distribución de Maxwell (2.39) para varios gases monoatómicos a la temperatura $T = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. Nótese que no puede ser correcta en relatividad especial porque permite velocidades superiores a la de la luz. De esta forma, esta función sólo es válida como aproximación cuando la temperatura no es muy elevada (en concreto $k_B T \ll mc^2$), de modo que se garantice que la inmensa mayoría de las partículas tengan velocidades muy inferiores a la de la luz, como sucede en los casos mostrados en la figura.

cosmológicos inferidos del efecto Sunyaev-Zel'dovich dependen sensiblemente de la distribución de velocidades de los electrones supuesta [35].

2.4.1. Buscando una simulación completamente relativista

Dada la ausencia de una demostración completamente rigurosa que nos permita resolver la incertidumbre asociada a la distribución de velocidades en relatividad especial, es necesario acudir a la experimentación. No obstante, el estado de la técnica actual dista mucho de ser capaz de medir las velocidades de las partículas de un gas relativista en un experimento real, especialmente teniendo en cuenta que deben medirse todas simultáneamente en el marco de referencia en reposo con el recipiente que contiene el gas. Los experimentos mencionados en el párrafo anterior tampoco pueden ser utilizados para discriminar entre una distribución u otra, pues la interpretación de los datos experimentales contiene aproximaciones adicionales que oscurecen el análisis.

Por tanto, nos centraremos en simulaciones por ordenador. Es de esperar que, al igual que ocurre en el caso no relativista, la distribución de velocidades de un gas en equilibrio termodinámico sea universal, no dependiendo de los detalles de la interacción entre las partículas, por lo que tenemos libertad para elegir el sistema físico objeto de la simulación. No obstante, las simulaciones de este sistema deben cumplir una serie de condiciones que garanticen su fiabilidad y su viabilidad. En concreto, el modelo simulado

1. *No debe violar ningún principio de la relatividad especial.*

Esto elimina la posibilidad de utilizar potenciales de interacción, ya que estos suponen una velocidad infinita de propagación de las interacciones. Los potenciales son una pieza clave

en la mayoría de las simulaciones de Dinámica Molecular.

2. *Debe exhibir un estado de equilibrio estacionario y universal.*

Es necesario que el sistema tienda, independientemente de las condiciones iniciales, hacia un estado de equilibrio estacionario. Para ello, es conveniente que la energía del sistema sea una constante del movimiento. Debe ser universal, es decir, no depender de los detalles de la interacción o con una dependencia de los parámetros que definen al sistema, como las masas de las partículas, que recoja una cierta forma funcional universal. En concreto, esta forma funcional debe reducirse a la distribución de Maxwell en el límite de bajas temperaturas.

3. *Puede ser simulado sin requerir mayores aproximaciones.*

Se necesita un método cuyas aproximaciones no vayan más allá de las típicas de truncamiento de los cálculos numéricos. En especial, es importante que no contenga aproximaciones que no se hayan comprobado en relatividad especial. Por ejemplo, no son válidas para nuestros propósitos las simulaciones probabilísticas DSMC (del inglés, *Direct Simulation Monte Carlo*) [45], que resuelven numéricamente la ecuación de Boltzmann, ya que la propia ecuación de Boltzmann está basada en la hipótesis de caos molecular.

4. *No requiere la introducción de campos para describir la interacción entre las partículas.*

Esta condición no es estrictamente necesaria, sino que es una condición práctica, ya que en la actualidad todavía no se ha conseguido llevar a cabo simulaciones relativistas de partículas que interactúan con campos sin acudir a aproximaciones que podrían poner en cuestión sus resultados con la precisión que estamos exigiendo aquí.

El punto 1 elimina la posibilidad de considerar interacciones instantáneas en la distancia, con lo que también hay que eliminar cuerpos rígidos como esferas o discos duros. En conjunción con el punto 4, esto nos lleva a considerar un sistema de partículas puntuales con colisiones binarias elásticas sucediendo en un punto del espacio-tiempo, pues así garantizamos que las interacciones entre las partículas sean tratadas de una manera completamente consistente con la relatividad especial.

La restricción a interacciones que suceden en un punto del espacio-tiempo nos lleva a restringir también la dimensión espacial del sistema a simular a $d = 1$, pues con dimensiones espaciales mayores la probabilidad de que ocurra una colisión se vuelve cero (o de medida nula), violándose entonces el punto 2, pues esto evitaría que el sistema se equilibrase.

No obstante, la condición de sistema unidimensional no es suficiente para garantizar la tendencia al equilibrio, ya que cuando dos partículas de la misma masa sufren una colisión elástica en $d = 1$ simplemente intercambian sus velocidades. Lo mismo sucede en el caso no relativista, donde es conocido que las colisiones en un gas unidimensional unicomponente no son capaces de conducir el sistema al equilibrio termodinámico. Por tanto, deben considerarse mezclas de dos o más componentes con distinta masa en reposo, porque, como mostramos a continuación, en este caso las colisiones no son triviales y son capaces de conducir al sistema al equilibrio.

2.4.2. Simulaciones relativistas con una mezcla bicomponente unidimensional

En nuestras simulaciones consideramos una mezcla bicomponente, consistente en N_1 partículas ligeras de masa m_1 , y N_2 partículas con masa $m_2 > m_1$. El movimiento de las $N = N_1 + N_2$ partículas estaba restringido al intervalo $[0, L]$, en reposo con el marco de referencia Σ_0 . Los resultados que presentaremos a continuación fueron obtenidos con paredes elásticas que producen reflexiones elásticas en los contornos, aunque condiciones de contorno periódicas³ producían los mismos resultados cuando se tomaba como cero el momento total inicial en Σ_0 .

Para simular este sistema de partículas clásicas e impenetrables con colisiones binarias elásticas utilizamos un algoritmo similar al de Alder y Wainwright [46] y Masoliver y Marro [47]. El paso de tiempo básico del algoritmo involucra tres tareas:

- (i) determinar el próximo evento de colisión (x_c, t_c) ;
- (ii) avanzar el sistema hasta el tiempo t_c ;
- (iii) calcular el momento de las partículas después de la colisión.

Esta última tarea se resuelve como sigue: cuando dos partículas A y B se encuentran en el mismo punto del espacio-tiempo (x_c, t_c) , entonces intercambian momento de acuerdo con las leyes de conservación relativistas de la energía y el momento:

$$\begin{aligned} p_A + p_B &= \hat{p}_A + \hat{p}_B, \\ E(m_A, p_A) + E(m_B, p_B) &= E(m_A, \hat{p}_A) + E(m_B, \hat{p}_B), \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde $p = mv\gamma(v)$ es el momento relativista y $E(m, p) = (m^2 + p^2)^{1/2}$ la energía. El símbolo con sombrero denota cantidades después de la colisión. Dado el par de momentos (p_A, p_B) antes de la colisión, las leyes de conservación (2.42) determinan el par de momentos (\hat{p}_A, \hat{p}_B) después de la colisión de la forma

$$\begin{aligned} \hat{p}_A &= \gamma(v_0)^2 [2v_0 E(m_A, p_A) - (1 + v_0^2)p_A], \\ \hat{p}_B &= \gamma(v_0)^2 [2v_0 E(m_B, p_B) - (1 + v_0^2)p_B], \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde $v_0 = (p_A + p_B) / [E(m_A, p_A) + E(m_B, p_B)]$ es la velocidad del centro de masas de las dos partículas, el cual es un invariante de colisión.

Estas simulaciones reproducen un colectivo micro-canónico relativista, ya que la energía total inicial \mathcal{E}_0 en Σ_0 se conserva en cada colisión elástica. Así, este modelo proporciona un marco óptimo para comprobar las predicciones de las distintas teorías cinéticas relativistas por medio de experimentos numéricos [48, 49, 50, 51, 5, 7]. También sirve para ilustrar conceptos fundamentales de la física estadística como la temperatura y el equilibrio térmico en la relatividad especial.

³No obstante, conviene resaltar que condiciones de contorno periódicas, muy comunes en simulaciones de Dinámica Molecular, no son compatibles con los principios de la relatividad especial, pues suponen interacciones superlumínicas, de hecho instantáneas, entre las distintas imágenes de la celda de simulación.

Con objeto de identificar las distribuciones de velocidad estacionarias para las partículas ligeras y pesadas, se esperó lo suficiente hasta que el gas bicomponente alcanzaba el estado de equilibrio, lo cual sucedía típicamente después de 100 colisiones por partícula. Entonces se midieron las velocidades de las partículas Σ_0 -simultáneamente, es decir, al mismo tiempo con respecto al marco de referencia en reposo Σ_0 . Para incrementar la estadística, se repitió este proceso varias veces durante distintos instantes de tiempo en cada simulación, agrupando todos los datos en un simple histograma. La figura 2.3 muestra un ejemplo, basado en una simulación con $N = 10000$ partículas ($N_1 = N_2 = 5000$, $m_2 = 2m_1$). Cada partícula partía de una posición inicial aleatoria $x_i(0) \in [0, L]$ y una velocidad inicial con módulo definido pero con sentido aleatorio $v_i(0) = \pm 0,8$. Esta velocidad se corresponde con una energía media por partícula de $\mathcal{E}_0/N = 2,5m_1$.

Tal y como se muestra en la figura 2.3, la distribución de velocidades (\diamond) de ambas especies coinciden muy bien con la función estándar de Jüttner f_J (línea continua), desviándose significativamente de la distribución de Jüttner modificada f_{MJ} (línea discontinua). Las simulaciones con $N_1 \neq N_2$ producían los mismos resultados.

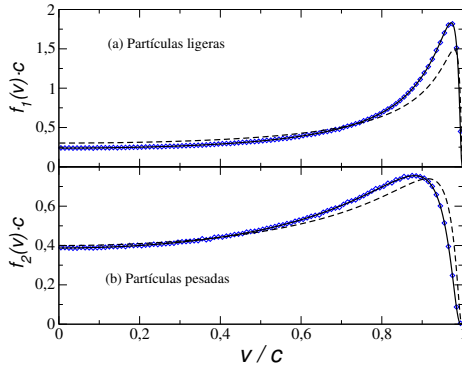


Figura 2.3: Función de distribución de equilibrio en el marco que contiene al gas Σ_0 . Se muestra la distribución de velocidades (\diamond) de una simulación con $N_1 = 5000$ partículas ligeras de masa m_1 y $N_2 = 5000$ partículas pesadas de masa $m_2 = 2m_1$. La energía media por partícula en Σ_0 es $\mathcal{E}_0/(N_1 + N_2) = 2,5m_1c^2$. Las líneas continuas se corresponden con las funciones de Jüttner (2.40) con el mismo parámetro $\beta_J = 0,702(m_1c^2)^{-1}$, pero con diferentes masas. Las líneas discontinuas muestran las correspondientes funciones de Jüttner modificada con $\beta_{MJ} = 0,402(m_1c^2)^{-1}$. Como las distribuciones son simétricas respecto al origen, sólo se muestra el eje positivo de la velocidad. Los resultados de simulación son consistentes con la distribución de Jüttner (2.40), proporcionando evidencia contra la distribución modificada (2.41).

Los parámetros $\beta_{J/MJ}$ de cada distribución fueron determinados a partir de la energía inicial por medio del siguiente razonamiento: Si los números de partículas N_1 y N_2 son suficientemente grandes (el límite termodinámico), entonces es de esperar que los histogramas obtenidos en la simulación converjan o bien a f_J (2.40) o bien a f_{MJ} (2.41). Con generalidad, la energía relativista media

2.4. Verificación numérica de la distribución de Jüttner

μ de una distribución de velocidades genérica $f(\mathbf{v}; m, \beta)$ viene dada por

$$\mu(m, \beta) = \int_{\{|\mathbf{v}| < 1\}} d^d \mathbf{v} f(\mathbf{v}; m, \beta) m \gamma(\mathbf{v}). \quad (2.44)$$

Suponiendo que existe un estado de equilibrio para ambas especies que puede ser descrito por el mismo valor β , y que la energía media por partícula es la misma para partículas de la misma especie para un gas en equilibrio, entonces la energía total puede expresarse como

$$\mathcal{E}_0 = N_1 \mu(m_1, \beta) + N_2 \mu(m_2, \beta). \quad (2.45)$$

En nuestro caso, los valores de las energías medias para las dos distribuciones consideradas, f_J y f_{MJ} , vienen dadas por (2.27) y (2.37), es decir,

$$\begin{aligned} \mu_J(m, \beta_J) &= m \frac{K_0(\beta_J m) + K_2(\beta_J m)}{2K_1(\beta_J m)}, \\ \mu_{MJ}(m, \beta_{MJ}) &= m \frac{K_1(\beta_{MJ} m)}{K_0(\beta_{MJ} m)}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Para cada simulación el conjunto de parámetros $(\mathcal{E}_0, N_1, N_2, m_1, m_2)$ es conocido. A partir de aquí, después de insertarlos en las ecuaciones (2.45) y (2.46), estos parámetros determinan unívocamente el parámetro $\beta_{J/MJ}$ que es consistente con la distribución de velocidades elegida $f_{J/MJ}$.

A pesar de las diferentes masas de ambas especies, las dos distribuciones de velocidad obtenidas en la simulación, mostradas en la figura 2.3, se ajustan muy bien a las funciones de Jüttner (2.40) con el mismo parámetro β_J . Este resultado se mantuvo para un amplio rango de condiciones iniciales y cociente de masas. De aquí se deduce que no sólo la función de Jüttner proporciona el mejor ajuste a los resultados numéricos, sino que también nos lleva a un concepto de temperatura en relatividad especial que está bien definido. Es de esperar que la temperatura T sea una cantidad intensiva que se equilibra a un valor común si se pone en contacto dos o más sistemas, esto es, si pueden intercambiar diferentes formas de energía. En nuestro caso, es natural considerar las especies como dos diferentes subsistemas que pueden intercambiar energía a través de las colisiones. Después de un cierto tiempo de relajación, el sistema combinado alcanza un estado de *equilibrio termodinámico*, donde cada subsistema viene descrito asintóticamente por la misma distribución de velocidades $f_J(v; m_i, \beta_J)$, difiriendo cada una sólo a través de las masas en reposo m_i . El parámetro de la distribución que se comparte, β_J , puede ser entonces utilizado para definir la temperatura relativista de equilibrio $T := (k_B \beta_J)^{-1}$.

No obstante, para que este concepto tenga verdadero sentido se requiere una restricción sobre el volumen espacial accesible –lo cual se realiza en estas simulaciones a través de las paredes reflectantes. De lo contrario, no se puede esperar que el sistema sea capaz de alcanzar un estado de equilibrio estacionario que sea independiente de las condiciones iniciales. Esta observación tiene una implicación importante: cualquier ecuación del tipo Boltzmann [49, 51, 5, 6, 21, 52, 7] que lleve a una distribución de velocidades estacionaria y universal implícitamente presupone la presencia de un confinamiento espacial, y por tanto, distinguiendo un marco de referencia preferido sobre los demás, el ligado al recipiente que contiene el gas.

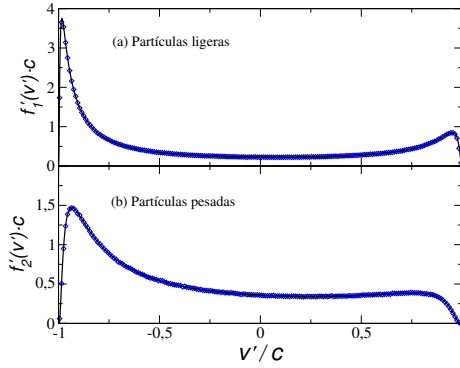


Figura 2.4: Funciones de distribución de equilibrio en un marco en movimiento Σ' . Se muestran la distribuciones de velocidad medidas por un observador que se mueve con velocidad $u = 0,25c$ relativa al marco Σ_0 , en reposo con el gas. Los valores de los parámetros son los mismos que la figura 2.3. Las líneas continuas se corresponden con la funciones de Jüttner f'_j dadas por (2.47) con el mismo parámetro $\beta_J = 0,702 (m_1 c^2)^{-1}$ que en la figura Fig. 2.3 y diferentes masas m_1 y m_2 .

Observadores en movimiento A partir de estas simulaciones también se pueden determinar las distribuciones de velocidad de equilibrio vistas por otro marco de referencia Σ' que se mueva con una velocidad u relativa al marco Σ_0 , en reposo con el gas. La figura 2.4 muestra los resultados para $u = 0,25$ y los mismos parámetros de simulación que en la figura 2.3. En contraste con la figura 2.3, los puntos (diamantes) mostrados en la figura 2.4 fueron obtenidos midiendo las velocidades Σ' -simultáneamente. Las líneas continuas en esta figura se corresponden con la función de distribución

$$f'_j(v'; m, \beta_J, u) = \frac{m \gamma(v')^3}{Z_J \gamma(u)} \exp[-\beta_J \gamma(u) m \gamma(v') (1 + uv')], \quad (2.47)$$

siendo v' la velocidad de la partícula en el marco en movimiento Σ' . La función (2.47) se reduce a la función de Jüttner para $u = 0$. De hecho, se puede obtener f'_j fácilmente a partir de las ecuaciones (2.23), (2.17) y (2.20).

Debido al excelente acuerdo entre las simulaciones numéricas y la ecuación (2.47), podemos enunciar de forma más precisa que dos componentes de gases relativistas están en equilibrio termodinámico para cualquier observador si la función de distribución de velocidades de una partícula vienen dadas por la funciones de Jüttner generalizadas (2.47) con los mismos parámetros β_J y u . Sólo en este caso se anula la energía de transferencia neta entre las componentes del gas en el recipiente.

La temperatura del gas $T = 1/(k_B \beta_J)$ también puede ser determinada en el marco de referencia inercial arbitrario Σ' por medio de promedios t' -simultáneos, ya que transformando la ecuación (2.30) se obtiene

$$k_B T = m \gamma(u)^3 \langle \gamma(v') (v' + u)^2 \rangle_{v'}, \quad (2.48)$$

donde

$$u = -\langle v' \rangle_{v'}, \quad (2.49)$$

es la velocidad media del gas medida por el observador móvil. De esta forma, las ecuaciones (2.48)–(2.49) definen un termómetro estadístico invariante de Lorentz. Cuando se adopta este termómetro, un cuerpo en movimiento no parece ni más caliente ni más frío, sino con la misma temperatura.

Por último, podemos utilizar (2.47) para calcular la energía total \mathcal{E}'_{ν} y el momento total del gas medidos ambos en el marco móvil Σ' . Para simplificar la discusión, consideremos que el gas es monocompente, aunque se obtienen los mismos resultados en el caso general. Entonces, la energía total $\mathcal{E}'_{\nu} = N\langle p'^0 \rangle_{v'}$ y el momento total $N\langle p' \rangle_{v'}$ del gas vienen dados por

$$\mathcal{E}'_{\nu} = \gamma(u)(\mathcal{E}_0 + u^2 Nk_B T), \quad (2.50a)$$

$$N\langle p' \rangle_{v'} = -\gamma(u)u(\mathcal{E}_0 + Nk_B T). \quad (2.50b)$$

Obsérvese que estos valores no se corresponden con los que se obtendrían si consideráramos el par energía total y momento total en Σ_0 , $(\mathcal{E}_0, 0)$, como las componentes de un cuadrivector, y aplicáramos la transformación de Lorentz correspondiente. En general, es conocido [53] que la energía y el momento total del gas en marcos de referencia distintos no están relacionados por medio de transformaciones de Lorentz. Esto se debe a que los valores medios (2.50), medidos t' -simultáneamente en Σ' , contienen contribuciones de las paredes del sistema. Efectivamente, a partir de la figura 2.1 podemos observar que el momento total del gas correspondiente al hiperplano $t' = 0$ no es cero, sino que está descompensado por las colisiones de las partículas del gas con la pared de la derecha. Podemos calcular esa transferencia de momento en Σ_0 , que sucede durante un intervalo de tiempo $\Delta t = uL$, como

$$\Delta P = -\Pi \Delta t = -\frac{Nk_B T}{L} uL = -uNk_B T, \quad (2.51)$$

donde hemos utilizado la expresión para la presión $\Pi = Nk_B T/L$ dada por la ecuación de estado del gas ideal en $d = 1$. Puede comprobarse que los valores medios (2.50) son los que se obtienen cuando se aplica la transformación de Lorentz correspondiente al cuadrivector

$$(\mathcal{E}_0, -uNk_B T). \quad (2.52)$$

2.4.3. Simulaciones semi-relativistas en 2D y 3D

Se han realizado simulaciones en dos y tres dimensiones espaciales que también han confirmado la distribución de Jüttner. Estas son simulaciones semi-relativistas, ya que contienen aproximaciones que violan los principios de relatividad especial. Por ejemplo, las simulaciones de Dinámica Molecular de discos duros ($d = 2$) [54] y esferas duras ($d = 3$) [55] utilizan un mecanismo de colisión

entre las partículas –que poseen una extensión finita en el espacio– instantáneo, y por tanto superlumínico. El mismo defecto tienen las simulaciones que utilizan un hamiltoniano en el que se ha modificado el término de energía cinética de las partículas para adaptarlo a la relatividad especial, [56] ($d = 2$), pues suponen potenciales de interacción instantáneos. No obstante, visto desde el punto de vista de la teoría cinética, las velocidades antes y después de cada colisión sí que están de acuerdo con las leyes de conservación de energía-momento relativistas, con lo que es de esperar que reproduzcan razonablemente los resultados obtenidos a partir de la ecuación de Boltzmann. Como esta predice la distribución de Jüttner, no es sorprendente que simulaciones de Monte Carlo de la ecuación de Boltzmann [57] ($d = 3$) reproduzcan adecuadamente dicha distribución.

En cualquier caso, ya hemos comprobado con las simulaciones unidimensionales completamente relativistas que la distribución de Jüttner describe perfectamente la solución de equilibrio termodinámico de un gas, con lo que podemos concluir que la aproximación fundamental de la ecuación de Boltzmann, la hipótesis de caos molecular, sigue siendo correcta en relatividad especial en sistemas en equilibrio, al menos en el límite de baja densidad de partículas. De la misma forma, es de esperar que todas estas simulaciones semi-relativistas proporcionen resultados correctos para gases diluidos.

2.5. Ergodicidad y aplicaciones de la distribución de Jüttner modificada

Uno de los problemas más fundamentales de la física estadística es la relación existente entre los promedios temporales, accesibles experimentalmente, y los promedios en los colectivos, piedra angular de la teoría de la mecánica estadística del equilibrio. La ergodicidad –la equivalencia de los dos procedimientos de promediado– es una hipótesis de trabajo ampliamente utilizada en la mecánica estadística [58], siendo muy difícil de probar en sistemas realistas. Durante las pasadas décadas, la hipótesis de ergodicidad ha sido intensamente examinada en sistemas no relativistas, tanto clásicos [59, 60, 61, 62] como cuánticos [63, 64, 65]. Sin embargo, se conoce mucho menos sobre su significado y validez en sistemas relativistas [66], a pesar de que conceptos básicos como el carácter estacionario se vuelven ambiguos cuando el tiempo se hace relativo [67, 68]. Es importante tener una idea clara del papel que tienen los distintos parámetros temporales y los conceptos termo-estadísticos, como por ejemplo la entropía, si uno quiere generalizar los teoremas de fluctuación lejos del equilibrio al marco relativista [69, 70]. Dado el rápido incremento en el número de aplicaciones en la física de altas energías [71, 72] y en astrofísica [73, 74], es deseable que haya un fundamento firme no sólo desde una perspectiva teórica, sino también desde una perspectiva práctica.

Lo ideal sería poder tratar problemas de muchas partículas relativistas dentro de un contexto de teoría cuántica de campos, ya que esto permitiría un tratamiento consistente de creación y aniquilación de partículas, así como de procesos de decaimiento [75]. De hecho, en los últimos años se han producido avances sustanciales en el estudio de sistemas dentro y fuera del equilibrio en el marco de teorías de campo relativistas. No obstante, el tratamiento teórico cuántico exacto es en

muchas situaciones prácticamente imposible, e incluso innecesario en un número considerable de aplicaciones, tales como en plasmas o en gases suficientemente diluidos.

En esta sección, intentaremos mostrar [22] que incluso un modelo relativista muy simple, como es el gas bicomponente unidimensional discutido en la sección anterior, puede proporcionar un cierto conocimiento sobre cuestiones conceptuales básicas tales como ¿cómo se relacionan los promedios utilizando el reloj del marco de referencia propio del recipiente con los del tiempo propio de cada partícula? o ¿cuál es la distribución de velocidades de una partícula que decae espontáneamente, justo en el momento en que se desintegra? Generalmente, las parametrizaciones con el tiempo propio proporcionan un marco natural para estudiar procesos de decaimientos de partículas en simulaciones relativistas, mientras que las parametrizaciones basadas en la coordenada tiempo global son más apropiadas para cuantificar la dinámica de un sistema de muchas partículas, y en particular, el ordenamiento causal de los eventos de colisión [76]. Por tanto, una combinación de varias parametrizaciones temporales puede resultar en esquemas de simulación útiles que mezclen técnica de Monte Carlo con otras de Dinámica Molecular. Finalizaremos mostrando cuál es la ley de transformación de la distribución de Jüttner modificada para observadores que se mueven con distinta velocidad, y cómo se pueden utilizar estos resultados para construir una teoría termodinámica relativista basada en el tiempo propio.

2.5.1. Ergodicidad y tiempo propio

Consideremos el movimiento de una partícula específica en un marco de referencia inercial arbitrario Σ . La velocidad $\mathbf{V} = d\mathbf{X}/dt$ de la partícula puede ser parametrizada en términos de la coordenada temporal t de Σ , denotada por $\mathbf{V}(t)$, o, alternativamente, por el tiempo propio de la partícula

$$\tau(t) = \int_0^t dt' \sqrt{1 - \mathbf{V}(t')^2}. \quad (2.53)$$

Podemos definir la función de distribución de velocidades t -promediada como

$$f_t(\mathbf{v}) = \frac{1}{t} \int_0^t dt' \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}(t')], \quad (2.54a)$$

y de forma similar, la asociada función de distribución de velocidades τ -promediada como

$$\hat{f}_\tau(\mathbf{v}) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau d\tau' \delta[\mathbf{v} - \hat{\mathbf{V}}(\tau')], \quad (2.54b)$$

donde $\hat{\mathbf{V}}(\tau)$ es una función que satisface $\mathbf{V}(t) = \hat{\mathbf{V}}(\tau(t))$. Para averiguar cómo f_t y \hat{f}_τ están relacionadas en el límite $t, \tau \rightarrow \infty$, debemos hacer el cambio de variable en (2.54b) al tiempo que marca Σ , obteniéndose

$$\hat{f}_\tau(\mathbf{v}) = \frac{t}{\tau} (1 - \mathbf{v}^2)^{1/2} f_t(\mathbf{v}) = \frac{t}{\tau} \frac{f_t(\mathbf{v})}{\gamma(\mathbf{v})}, \quad (2.55)$$

Entonces, podemos definir las distribuciones estacionarias

$$f_{\infty}(\mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow \infty} f_t(\mathbf{v}), \quad \hat{f}_{\infty}(\mathbf{v}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{f}_{\tau}(\mathbf{v}). \quad (2.56a)$$

Estas igualdades deben ser interpretadas en un sentido de distribución, como la misma función delta de Dirac, es decir

$$\int d^d v f_{\infty}(\mathbf{v}) g(\mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^d v f_t(\mathbf{v}) g(\mathbf{v}), \quad (2.56b)$$

$$\int d^d v \hat{f}_{\infty}(\mathbf{v}) g(\mathbf{v}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int d^d v \hat{f}_{\tau}(\mathbf{v}) g(\mathbf{v}) \quad (2.56c)$$

para cualquier función de prueba $g(\mathbf{v})$ físicamente relevante que se comporte suficientemente bien. Si la dinámica es tal que los límites f_{∞} y \hat{f}_{∞} existen, entonces (2.55) implica que

$$\hat{f}_{\infty}(\mathbf{v}) = \alpha^{-1} f_{\infty}(\mathbf{v})/\gamma(\mathbf{v}), \quad (2.57a)$$

donde la constante

$$\alpha = \int d^d v f_{\infty}(\mathbf{v})/\gamma(\mathbf{v}) \quad (2.57b)$$

asegura la normalización de la distribución. La ecuación (2.57) nos dice que asintóticamente, la distribución t -promediada f_{∞} difiere de la τ -promediada \hat{f}_{∞} en un factor proporcional a la energía relativista de la partícula $m\gamma(\mathbf{v})$. Volveremos a este punto más adelante. Antes de eso, vamos a comparar las distribuciones promediadas en el tiempo con las promediadas en el colectivo en nuestro modelo unidimensional de partículas impenetrables.

Distribuciones de velocidad con promedios en el colectivo Ya hemos comentado que simulaciones (semi o completamente relativistas) de Dinámica Molecular, llevadas a cabo por distintos grupos [13, 54, 56, 55], han confirmado en las tres dimensiones espaciales relevantes que la función de distribución de velocidades relativista estacionaria de un gas d -dimensional diluido se puede describir con precisión por la distribución de Jüttner, ecuación (2.40).

Merece la pena prestar atención a cómo se realizaron exactamente las medidas en estas simulaciones:

- (i) Se midieron las velocidades en el marco de referencia Σ_0 en reposo con los contornos del sistema.
- (ii) Las velocidades de todas las partículas fueron medidas t -simultáneamente en Σ_0 , donde t es la coordenada temporal de Σ_0 .

Este procedimiento puede ser interpretado como de medición de la distribución de velocidades de una partícula por medio de promedios en el colectivo. A continuación, compararemos los resultados de este método con aquellos obtenidos con promedios temporales sobre la trayectoria individual de una partícula. Conviene recordar aquí que las medidas simultáneas de muchas partículas se pueden llevar a cabo fácilmente en simulaciones por ordenador, pero son muy difíciles de realizar en experimentos reales debido a la finitud de la velocidad de las señales en relatividad.

Simulaciones numéricas Podemos comprobar cómo están relacionados los promedios temporales con los promedios en el colectivo en las simulaciones unidimensionales que utilizamos para verificar la función de Jüttner.

Para ello, primero distingamos entre cuatro tipos de medida:

- (a) t -promedio en el colectivo: Después de un periodo de relajación al equilibrio, se miden simultáneamente la velocidad de todas las partículas en Σ_0 en el mismo instante de tiempo t . Después repetimos este procedimiento para varias condiciones iniciales aleatorias que partan de la misma energía, reproduciendo así el colectivo micro-canónico a la energía \mathcal{E}_0 .
- (b) t -promedio sobre una trayectoria: Se elige una partícula de cada especie y se miden sus velocidades en varios instantes de tiempo equidistantes $t^{(1)}, \dots, t^{(n)}$.
- (c) τ -promedio en el colectivo: Se calcula el tiempo propio τ_i para cada partícula durante la simulación y se miden sus velocidades para un valor fijo del tiempo propio $\tau_1 = \dots = \tau_{N_1+N_2} = \tau$. Posteriormente se repite este procedimiento para varias condiciones iniciales con la misma energía total.
- (d) τ -promedio sobre una trayectoria: Se escoge una partícula de cada especie y se miden sus velocidades en varios instantes de tiempo-propio equidistantes $t^{(1)}, \dots, t^{(n)}$.

La figura 2.5 muestra las distribuciones de equilibrio calculadas a partir de la simulación unidimensional. En el caso de medidas en el colectivo, (a) y (c), se consideraron promedios sobre 50 condiciones iniciales distintas compatibles con la misma energía total. Los promedios temporales (b) y (c) fueron determinados midiendo las velocidades en $5 \cdot 10^5$ instantes utilizando los intervalos de tiempo $\Delta t = \Delta \tau = 4 \cdot 10^{-4} L/c$, donde L es la extensión espacial del sistema.

Comparemos primero las funciones de distribución obtenidas por medio de los dos métodos de promediado tipo t (a) y (b). Como puede observarse en los símbolos de cruces y diamantes de la figura 2.5, los dos procedimientos llevan a la distribución de Jüttner con el mismo parámetro β para ambas especies, esto es

$$f_{\infty}(v) = f_J(v). \quad (2.58a)$$

De la misma forma, comparando los histogramas obtenidos por el método de promediado tipo τ en el colectivo (c), véase los triángulos, y los de tipo trayectoria τ , los símbolos +, se deduce que ambos métodos llevan a la misma distribución. Pero esta distribución de tiempo propio se distingue de la función de Jüttner en un factor $1/[m\gamma(v)]$, esto es,

$$\hat{f}_{\infty}(v) = \alpha^{-1} f_J(v)/\gamma(v) =: f_{MJ}(v). \quad (2.58b)$$

Por tanto, estas simulaciones confirman la validez de la ecuación (2.57) para el gas bicomponente unidimensional. Por otro lado, las ecuaciones (2.58) proporcionan dos afirmaciones de ergodicidad al nivel de las distribuciones de velocidad de una partícula. Evidentemente, es necesario distinguir entre los distintos parámetros temporales cuando se habla de ergodicidad en sistemas relativistas.

Además, de la ecuación (2.58b) se deduce que la distribución modificada de Jüttner (2.41) es precisamente la distribución de velocidades de un gas en equilibrio cuando se utiliza la parametrización del tiempo propio de las partículas. Este resultado no se conocía cuando se obtuvo por primera vez la distribución de Jüttner modificada [10, 12].

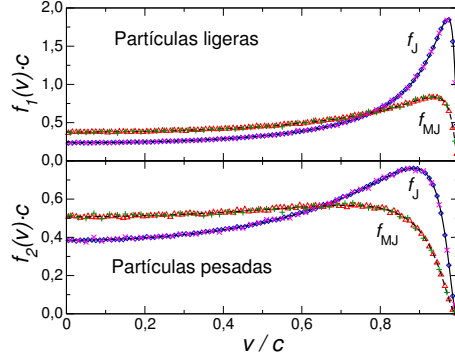


Figura 2.5: Función de distribución de velocidades medidas utilizando el tiempo del marco propio del recipiente que contiene al gas y el tiempo propio de las partículas. Símbolos/métodos: (a) t -promedios en el colectivo: \diamond , (b) t -promedios sobre trayectoria: \times , (c) τ -promedios en el colectivo: \triangle y (d) τ -promedios sobre trayectoria: $+$. Los resultados están basados en una simulación con $N_1 = 5000$ partículas ligeras de masa m_1 y $N_2 = 5000$ partículas pesadas de masa $m_2 = 2m_1$. Las líneas continuas se corresponden con las funciones de Jüttner (2.40) con $\beta = 0,709 (m_1 c^2)^{-1}$ con las distintas masas de cada especie. Las líneas discontinuas muestran la distribución de Jüttner modificada, ecuación (2.58b), con el mismo parámetro β . Como las distribuciones son simétricas con respecto al origen, sólo se muestra el eje positivo de velocidad.

Principio de máxima entropía De forma análoga, podemos establecer una correspondencia entre las entropías (2.21) que definimos a partir de las densidades de referencia (2.22) y (2.31) y los dos parámetros temporales que acabamos de discutir. La densidad de referencia constante (2.22) se corresponde con la parametrización temporal natural en el marco de referencia ligado al recipiente que contiene al gas, mientras que la densidad (2.31) lo hace con la parametrización del tiempo propio de las partículas.

Obsérvese que el inverso de la temperatura, β , tiene el mismo valor tanto para la distribución t -estacionaria (2.58a) como para la τ -estacionaria (2.58b). Esto es lo que se deduce de (2.57), siendo confirmado por las simulaciones presentadas en la figura 2.5.

Sin embargo, no ocurre lo mismo con la energía total del sistema, ya que cuando se mide simultáneamente en Σ_0 se obtiene el valor $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_0$ (2.24), mientras que cuando se mide τ -simultáneamente se obtiene \mathcal{E}_τ (2.34). Esta diferencia entre la misma variable de estado termodinámica es una consecuencia de las distintas parametrizaciones temporales, pues la energía de cada partícula está

medida en distintos puntos del espacio-tiempo siguiendo un criterio diferente en cada parametrización. Lo mismo sucede cuando se decide utilizar otra parametrización temporal, como por ejemplo la coordenada temporal de un segundo marco de referencia que se mueva con una cierta velocidad con respecto a Σ_0 , siendo en último término una consecuencia de la falta de sincronía (la relatividad especial) entre distintos observadores. Esta dificultad a la hora de definir variables termodinámicas globales es el origen de las distintas teorías termodinámicas relativistas y la confusión que hubo durante muchos años sobre ellas, véase por ejemplo [55].

Aplicaciones Uno se podría preguntar si distintas parametrizaciones temporales tienen alguna relevancia en la práctica. Por un lado, cuando se aplican técnicas de Dinámica Molecular en problemas relativistas, la parametrización en la coordenada temporal del marco de coordenadas en reposo con el recipiente que contiene el gas es útil porque proporciona una herramienta adecuada para la ordenación causal de los eventos de colisión [76]. Por otro lado, las parametrizaciones con el tiempo propio son muy comunes en relatividad especial porque el tiempo propio es intrínseco a la partícula y no depende del sistema de referencia elegido. Además, estas nos proporcionan un marco de trabajo natural para la inclusión de procesos de decaimiento de partículas en simulaciones relativistas, ya que las cuestiones de la vida media de las partículas se plantean en términos de intervalos de tiempo propio. Esto sugiere la implementación de algoritmos híbridos que combinen esquemas de Dinámica Molecular para el movimiento de las partículas con procesos estocásticos de decaimiento, aniquilación o creación. Estos eventos incluyen reacciones químicas que transforman una o más partículas en otras. Por ejemplo, en el caso más sencillo, los intervalos de tiempo propio entre sucesivos eventos de decaimiento pueden ser obtenidos a partir de una distribución exponencial cuya vida media sea determinada por la teoría cuántica de campos. Generalmente, las reglas de creación, reacción y decaimiento tienen que ser escogidas de acuerdo con las probabilidades y restricciones (leyes de conservación) que se derivan de las correspondientes teorías de campos [75].

Las simulaciones de Monte Carlo basadas en la reproducción numérica de la ecuación de Boltzmann [45, 57], pueden ser fácilmente generalizables para incluir fenómenos cuánticos tales como procesos de decaimiento. En este contexto, merece la pena mencionar que la distribución de energía de una partícula inestable al final de su vida (suponiendo que vive lo suficiente como para que el equilibrio térmico sea relevante) viene mejor descrito por la función de Jüttner modificada ϕ_{MJ} antes que por la estándar de Jüttner ϕ_J .

2.5.2. Hacia una termodinámica relativista de tiempo propio

Desde que se formuló la teoría de la relatividad especial, toda ecuación con fundamento físico ha sido puesta a prueba para ver cómo se transforma para observadores que se muevan con velocidades diferentes, prestando gran atención a que la teoría verifique los principios de la relatividad especial, vistiendo las ecuaciones o incluso modificándolas de forma que sean adecuadas para las transformaciones de Lorentz. Una de las teorías que no ha llevado bien tal extensión relativista ha sido la termodinámica, la cual ha sido objeto de considerable estudio durante el siglo pasado.

En este apartado estudiaremos el efecto de una parametrización de tiempo propio en las transformaciones de Lorentz de varias cantidades, desde la distribución marginal de momentos hasta diversas variables termodinámicas de un gas relativista. Las parametrizaciones de tiempo propio son muy comunes en relatividad especial porque el tiempo propio es intrínseco a la partícula y no depende de un marco de referencia específico.

Ya hemos visto que la distribución de Jüttner dada por la ecuación (2.23),

$$\phi_J(\mathbf{p}) \propto \exp(-\beta p^0), \quad (2.59)$$

con $p^0 = (m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$, se corresponde con la distribución de los momentos de una partícula de un gas relativista en equilibrio térmico en un recipiente, visto desde un marco de referencia Σ_0 en reposo con el recipiente. Esta densidad de probabilidad presupone que los momentos de las partículas son medidas t -simultáneamente, es decir, en el mismo instante de tiempo con respecto al marco en reposo Σ_0 . Un observador en un marco de referencia Σ' que se mueva con una velocidad \mathbf{u} respecto de Σ_0 medirá (2.17), es decir,

$$\phi'_J(\mathbf{p}') = \frac{V'}{V} \phi_J(\mathbf{p}), \quad (2.60)$$

donde ϕ'_J es la distribución de momentos medida t' -simultáneamente y V' es el volumen del gas que se observa en Σ' como consecuencia de la contracción de Lorentz.

Es de esperar un comportamiento diferente cuando se consideran otras parametrizaciones temporales. Ya hemos visto que la parametrización con el tiempo propio de las partículas nos lleva a la distribución de Jüttner modificada (2.32),

$$\phi_{MJ}(\mathbf{p}) \propto \frac{\phi_J(\mathbf{p})}{p^0}. \quad (2.61)$$

En el apartado anterior obtuvimos una deducción (ver ecuación (2.57)) de (2.61) basada únicamente en las propiedades de transformación del tiempo propio de las partículas (2.53), que son válidas en cualquier marco de referencia inercial. Por consiguiente, en un marco de referencia inercial arbitrario Σ' se debe cumplir la misma relación:

$$\phi'_{MJ}(\mathbf{p}') \propto \frac{\phi'_J(\mathbf{p}')}{p'^0}, \quad (2.62)$$

donde ϕ'_{MJ} denota la distribución τ -estacionaria en Σ' . Combinando (2.60) y (2.62) se obtiene

$$\phi'_{MJ}(\mathbf{p}') \propto \frac{p^0}{p'^0} \phi_{MJ}(\mathbf{p}). \quad (2.63)$$

Teniendo en cuenta (2.10) y el hecho de que las distribuciones de momentos están normalizadas a la unidad (2.15) en cualquier marco de referencia, obtenemos la *ley de transformación para la distribución de Jüttner modificada*,

$$d^d p' \phi'_{MJ}(\mathbf{p}') = d^d p \phi_{MJ}(\mathbf{p}). \quad (2.64)$$

Por consiguiente, para distribuciones de momento del tiempo propio es la medida de probabilidad –y no la densidad de probabilidad en el espacio fásico– la que es invariante de Lorentz. La ley de transformación (2.64) es la misma que se obtendría en la mecánica pre-relativista para la distribución de momentos bajo transformaciones de Galileo. En ese contexto, los efectos de confinamiento mencionados en la primera sección de este capítulo (véase el párrafo después de la ecuación (2.17)) no están presentes, ya que existe un parámetro de tiempo universal entre los distintos observadores. Dentro de la relatividad especial, el ejemplo más sencillo de distribuciones t -simultáneas en las que se cumple la ley (2.64) es la de un sistema de partículas que evolucionan libremente sin ningún tipo de confinamiento (siendo la distribución en el espacio fásico claramente no estacionaria). Por tanto, la parametrización del tiempo propio puede ser utilizada para eliminar efectos indeseados de confinamiento al nivel de las distribuciones de momentos.

En la referencia [77] se mostró que la ecuación (2.62) proporciona una descripción adecuada de los resultados de simulación de un gas bidimensional semi-relativista. En este artículo, también se afirma que el principio de máxima entropía es erróneo debido a inconsistencias encontradas en su aplicación a observadores móviles. No obstante, esta afirmación está basada en la hipótesis de que la densidad de referencia (2.31) se transforma como un escalar de Lorentz, lo cual es incorrecto. La invariancia de la medida de referencia (2.33) significa que

$$d\nu = d\nu' \quad (2.65)$$

bajo transformaciones de Lorentz. A partir de aquí, escribiendo $d\nu' = \rho'_\tau(\mathbf{p}')d^d p'$ y utilizando (2.10), se obtiene de las ecuaciones (2.33) y (2.65)

$$\rho'_\tau(\mathbf{p}') = 1/p'^0. \quad (2.66)$$

Podemos utilizar estos resultados para calcular la funcional de entropía relativa en Σ' :

$$\begin{aligned} S[\phi_\tau|\rho_\tau] &= - \int d^d p \phi_\tau(\mathbf{p}) \ln \frac{\phi_\tau(\mathbf{p})}{\rho_\tau(\mathbf{p})} \\ &= - \int d^d p' \phi'_\tau(\mathbf{p}') \ln \frac{\phi'_\tau(\mathbf{p}')}{\rho'_\tau(\mathbf{p}')} = S'[\phi'_\tau|\rho'_\tau], \end{aligned} \quad (2.67)$$

donde ϕ_τ es cualquier distribución que se transforme como (2.64). Por tanto, la entropía asociada con la función de Jüttner modificada es un invariante de Lorentz.

De esta manera, la forma correcta del principio de máxima energía para la distribución de momentos τ -estacionaria ϕ'_τ en un marco de referencia arbitrario consiste en maximizar la funcional de entropía relativa

$$S'[\phi'_\tau|\rho'_\tau] = - \int d^d p' \phi'_\tau(\mathbf{p}') \ln \frac{\phi'_\tau(\mathbf{p}')}{\rho'_\tau(\mathbf{p}')} \quad (2.68a)$$

bajo las ligaduras de normalización, energía y momento:

$$1 = \int d^d p' \phi'_\tau(\mathbf{p}'), \quad (2.68b)$$

$$\langle p'^0 \rangle'_\tau = \int d^d p' \phi'_\tau(\mathbf{p}') p'^0, \quad (2.68c)$$

$$\langle \mathbf{p}' \rangle'_\tau = \int d^d p' \phi'_\tau(\mathbf{p}') \mathbf{p}', \quad (2.68d)$$

donde $\langle \cdot \rangle'_\tau$ denota promedios en el marco de referencia Σ' tomados a tiempo propio constante. El principio de maximización de la entropía nos lleva entonces a

$$\ln \frac{\phi'_\tau(\mathbf{p}')}{\rho'_\tau(\mathbf{p}')} + 1 + \lambda + \xi p'^0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}' = 0, \quad (2.69)$$

donde λ , ξ y \mathbf{a} son multiplicadores de Langrange. Estos vienen determinados por las ligaduras (2.68b)–(2.68d), que llevan a (2.62). Nótese que los promedios τ -simultáneos $\langle \cdot \rangle'_\tau$ difieren de los promedios t -simultáneos $\langle \cdot \rangle_t$, pues se corresponden con distribuciones distintas.

Por último, se pueden conectar los promedios (2.68c)–(2.68d) en Σ' con los tomados en el marco en reposo con el gas Σ_0 utilizando (2.64),

$$\langle p'^0 \rangle'_\tau = \gamma(u) \langle p^0 \rangle_\tau, \quad \langle \mathbf{p}' \rangle'_\tau = -\mathbf{u} \gamma(u) \langle p^0 \rangle_\tau, \quad (2.70)$$

mostrando que, con una parametrización de tiempo propio, la energía del gas y el momento se transforman como las componentes de un cuadrivector. Por contra, ya hemos visto que con promedios definidos con medidas t -simultáneas, ecuaciones (2.50), la energía y el momento total del gas en marcos de referencia distintos no están relacionados por medio de transformaciones de Lorentz. Esta discrepancia es uno de los motivos principales de la existencia de varias teorías termodinámicas relativistas aparentemente contradictorias entre sí, como la teoría de Einstein-Planck o la de Ott, en las que se escogen diferentes definiciones de la energía y el momento total del sistema [55]. De forma similar a lo que sucede con la distribución de momentos, el motivo de tal discrepancia reside en la combinación de confinamiento y el carácter no local de las variables termodinámicas. Una vez más, en el intervalo de tiempo entre las observaciones en distintos marcos de referencia, algunas partículas colisionan con las paredes del recipiente, lo cual lleva a una energía y un momento total que contiene contribuciones de las paredes.

Acabamos de mostrar que se pueden superar estas dificultades utilizando una parametrización del tiempo propio. Podemos entonces proponer una termodinámica relativista del tiempo propio. Esta teoría carece de las ambigüedades de las formulaciones tradicionales definidas a partir de promedios t -simultáneos. El precio que uno tiene que pagar es que las variables termodinámicas están definidas de forma τ -simultánea, con lo que son difíciles de medir directamente por medios experimentales. No obstante, este es un problema que no está ausente en las teorías tradicionales definidas t -simultáneamente, pues es virtualmente imposible medir directamente las cantidades (no locales) que aparecen en ellas.

Agradecimientos

Es de agradecer la colaboración durante varios años con Jörn Dunkel y también el apoyo que me ha dado siempre Marta, ese sol de energía inextinguible.

Bibliografía

- [1] A. Einstein, *Ann. Phys. (Leipzig)* **17**, 891–921 (1905a).

2.5. Bibliografia

- [2] A. Einstein, *Ann. Phys. (Leipzig)* **18**, 639–641 (1905b).
- [3] F. Jüttner, *Ann. Phys. (Leipzig)* **34**, 856–882 (1911).
- [4] J. C. Maxwell, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **157**, 49–88 (1867).
- [5] L. P. Horwitz, W. C. Schieve, and C. Piron, *Ann. Phys.* **137**, 306–340 (1981).
- [6] L. P. Horwitz, S. Shashoua, and W. C. Schieve, *Physica A* **161**, 300–338 (1989).
- [7] W. C. Schieve, *Found. of Physics* **35**, 1359 – 1381 (2005).
- [8] G. Kaniadakis, *Phys. Rev. E* **66**, 056125 (2002).
- [9] E. Lehmann, *J. Math. Phys.* **47**, 023303 (2006).
- [10] J. Dunkel, and P. Hänggi, *Physica A* **374**, 559–572 (2007).
- [11] R. Silva, and J. A. S. Lima, *Phys. Rev. E* **72** (2005).
- [12] J. Dunkel, P. Talkner, and P. Hänggi, *New J. Phys.* **9**, 144 (2007).
- [13] D. Cubero, J. Casado-Pascual, J. Dunkel, P. Talkner, and P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 170601 (2007).
- [14] K. Huang, *Statistical Mechanics*, Wiley, New York, 1963.
- [15] J. A. Wheeler, and R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 425–433 (1949).
- [16] D. G. Currie, T. F. Jordan, and E. C. G. Sudarshan, *Rev. Mod. Phys.* **35**, 350–375 (1963).
- [17] H. Van Dam, and E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **138**, B1576–B1582 (1965).
- [18] A. Komar, *Phys. Rev. D* **18**, 1887–1893 (1978).
- [19] G. Marmo, N. Mukunda, and E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. D* **30**, 2110–2116 (1984).
- [20] R. Hakim, and H. D. Sivak, *AIP Conf. Proc.* **841**, 63–99 (2006), a Century of Relativity Physics: ERE 2005; XXVIII Spanish Relativity Meeting.
- [21] C. Cercignani, and G. M. Kremer, *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*, vol. 22 of *Progress in mathematical physics*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2002.
- [22] D. Cubero, and J. Dunkel, *EPL* **87**, 30005 (2009).
- [23] N. G. van Kampen, *Physica* **43**, 244–262 (1969).
- [24] F. Debbasch, J. P. Rivet, and W. A. van Leeuwen, *Physica A* **301**, 181–195 (2001).

-
- [25] W. Pauli, “Relativitätstheorie,” in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Teubner, Leipzig, 1921, vol. V/2, pp. 539–775.
- [26] T. Matolsci, J. Kristóf, and M. Székely, *Publ. Appl. Analysis* **7**, 1–14 (1996).
- [27] J. Dunkel, and P. Hänggi, *Phys. Rep.* **471**, 1–73 (2009).
- [28] W. Ochs, *Rep. Math. Phys.* **9**, 135–155 (1976a).
- [29] W. Ochs, *Rep. Math. Phys.* **9**, 331–354 (1976b).
- [30] S. Kullback, and R. A. Leibler, *Ann. Math. Statistics* **22**, 79–86 (1951).
- [31] A. Wehrl, *Rev. Mod. Phys.* **50**, 221–260 (1978).
- [32] A. Wehrl, *Rep. Math. Phys.* **30**, 119–129 (1991).
- [33] M. Abramowitz, and I. A. Stegun, editors, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [34] G. Chacón-Acosta, L. Dagdug, and H. A. Morales-Técotl, *Phys. Rev. E* **81**, 021126 (2010).
- [35] N. Itoh, Y. Kohyama, and S. Nozawa, *Astrophys. J.* **502**, 7–15 (1998).
- [36] M. E. Dieckmann, L. Drury, and P. K. Shukla, *New J. Phys.* **8**, 40 (2006).
- [37] R. Rapp, V. Greco, and H. van Hees, *Nucl. Phys. A* **774**, 685–688 (2006).
- [38] H. van Hees, V. Greco, and R. Rapp, *Phys. Rev. C* **73**, 034913 (2006).
- [39] F. Debbasch, K. Mallick, and J. P. Rivet, *J. Stat. Phys.* **88**, 945–966 (1997).
- [40] R. Zygadło, *Phys. Lett. A* **345**, 323–329 (2005).
- [41] J. Dunkel, and P. Hänggi, *Phys. Rev. E* **71**, 016124 (2005).
- [42] R. A. Sunyaev, and Y. B. Zeldovich, *Comm. Astrophys. Space Phys.* **4**, 173 (1972).
- [43] M. Birkinshaw, S. F. Gull, and H. Hardebeck, *Nature* **309**, 34–35 (1984).
- [44] M. Jones et al., *Nature* **365**, 320 – 323 (1993).
- [45] G. A. Bird, *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*, Oxford, Clarendon, 1994.
- [46] B. J. Alder, and T. E. Wainwright, *J. Chem. Phys.* **31**, 459–466 (1959).
- [47] J. Masoliver, and J. Marro, *J. Stat. Physics* **31**, 565–575 (1983).
- [48] J. L. Synge, *The Relativistic Gas*, North-Holland, Amsterdam, 1957.

- [49] W. Israel, *J. Math. Phys.* **4**, 1163–1181 (1963).
- [50] D. Ter Haar, and H. Wergeland, *Phys. Rep.* **1**, 31–54 (1971).
- [51] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen, and C. G. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory: Principles and Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [52] H. Andréasson, The Einstein-Vlasov System/Kinetic Theory, <http://www.livingreviews.org/lrr-2005-2> (2005).
- [53] N. G. van Kampen, *Phys. Rev.* **173**, 295–301 (1968).
- [54] A. Montakhab, M. Ghodrati, and M. Barati, *Phys. Rev. E* **79**, 031124(R) (2009).
- [55] J. Dunkel, P. Hänggi, and S. Hilbert, *Nat. Phys.* **5**, 741 (2009a).
- [56] A. Aliano, L. Rondoni, and G. P. Moriss, *Eur. Phys. J. B* **50**, 361–365 (2006).
- [57] F. Peano, M. Marti, L. O. Silva, and G. Coppa, *Phys. Rev. E* **79**, 025701(R) (2009).
- [58] R. Becker, *Theory of heat*, Springer, New York, 1967.
- [59] R. G. Palmer, *Adv. Phys.* **31**, 669–735 (1982).
- [60] M. Pettini, and M. Landolfi, *Phys. Rev. A* **41**, 768–783 (1990).
- [61] G. Bel, and E. Barkai, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 240602 (2005).
- [62] A. Rebenshtok, and E. Barkai, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 210601 (2007).
- [63] E. B. Stechel, and E. J. Heller, *Ann. Rev. Phys. Chem.* **35**, 563–589 (1984).
- [64] J. P. Bouchoaud, *J. Physique I* **2**, 1705–1713 (1992).
- [65] L. Kaplan, and E. J. Heller, *Physica D* **121**, 1–18 (1998).
- [66] K. A. Johns, and P. T. Landsberg, *J. Phys. A: Gen. Phys.* **3**, 113–120 (1970).
- [67] A. Gamba, *Am. J. Phys.* **35**, 83–89 (1967).
- [68] J. Dunkel, P. Hänggi, and S. Weber, *Phys. Rev. E* **79**, 010101(R) (2009b).
- [69] A. Fingerle, *Compt. Rend. Acad. Sci. Physique* **8**, 696–713 (2007).
- [70] B. Cleuren, K. Willaert, A. Engel, and C. V. den Broeck, *Phys. Rev. E* **77**, 022103 (2008).
- [71] A. Bret, L. Gremillet, D. Benisti, and E. Lefebvre, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 205008 (2008).
- [72] A. Karmakar, N. Kumar, G. Shvets, O. Polomarov, and A. Pukhov, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 255001 (2008).

- [73] B. Wolfe, and F. Melia, *Astrophys. J.* **638** (2006).
- [74] N. Itoh, and S. Nozawa, *Astron. Astrophys.* **417**, 827–832 (2004).
- [75] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [76] H. Sorge, H. Stöcker, and W. Greiner, *Ann. Phys.* **192**, 266–306 (1989).
- [77] M. Ghodrati, and A. Montakhab, *Phys. Rev. E* **82**, 011110 (2010).

Función de distribución manifiestamente covariante para un gas relativista en equilibrio

Guillermo Chacón Acosta

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas, Universidad Autónoma Metropolitana-Cuajimalpa, Artificios 40, México D. F. 01120, México.

gchacon@correo.cua.uam.mx

Leonardo Dagdug y Hugo A. Morales Técotl

Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, México D. F. 09340, México.

dll@xanum.uam.mx, hugo@xanum.uam.mx

Resumen

La función de distribución del equilibrio para un gas relativista, desempeña un papel clave en la descripción de varios efectos en física de altas energías y en astrofísica, por mencionar algunos. Al involucrar cantidades en distintos marcos de referencia las propiedades de transformación son imprescindibles. En este capítulo veremos que una temperatura invariante es consecuencia natural de la covariancia manifiesta de la teoría. Se presenta una derivación manifiestamente covariante de la distribución de Jüttner y del teorema de equipartición. En esta descripción resulta necesario introducir un vector Θ^μ cuya norma se identifica con el recíproco de la temperatura en el marco comóvil, al pedir que los resultados de la teoría cinética en equilibrio estén de acuerdo con la termodinámica. Este análisis contiene, como un caso particular, las anteriores versiones no manifiestamente covariantes.

3.1. Introducción

La distribución de velocidades en el caso del gas relativista en equilibrio, se remonta a F. Jüttner, quien en 1911 obtuvo una distribución consistente para partículas relativistas que no considera la contribución de partículas con velocidades superiores a la velocidad de la luz en el vacío, denotada por c , y que sí figuran en la distribución de Maxwell. Esto se logró considerando la forma relativista de la energía de las partículas en un principio de máxima entropía, obteniendo la ahora llamada distribución de Jüttner [1] que en el espacio de momentos es:

$$f = \frac{n}{4\pi kT m^2 c K_2(mc^2/kT)} e^{-\frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{kT}}, \quad (3.1)$$

donde m es la masa en reposo de cualquiera de las partículas que forman el gas, k es la constante de Boltzmann y K_2 es una función de Bessel modificada de segundo orden [2]. Las cantidades restantes: la densidad de número de partículas n , la temperatura T y las componentes espaciales del momento relativista \mathbf{p} , están determinadas por un observador comóvil con el gas.

El producto interno del momento relativista forma un invariante, lo cual relaciona la magnitud del momento espacial con la energía de la partícula a través de $(E/c)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$, la cual se conoce como la condición de capa de masa. En el régimen no-relativista $|\mathbf{p}| \ll mc$, $kT \ll mc^2$, tenemos que $f \approx f_{\text{Maxwell}}$, donde f_{Maxwell} es la distribución de velocidades de Maxwell. Es decir, las magnitudes de las velocidades de las partículas mayores que la velocidad de la luz c , son sólo un artificio de la aproximación no relativista como se puede apreciar en la Fig. (3.1).

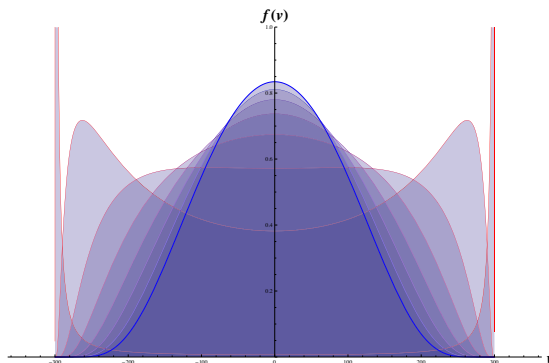


Figura 3.1: Función de Distribución de Jüttner. Se grafica la distribución (3.1) en función de la velocidad para diferentes regímenes de temperatura. El color azul corresponde a $mc^2/kT \gg 1$, es decir, el caso no relativista, para éste puede apreciarse que la distribución aproxima a la de Maxwell-Boltzmann truncada. El color rojo es el caso ultra relativista $mc^2/kT \ll 1$, puede verse que conforme las partículas se acercan a la velocidad de la luz c , la distribución tiene dos picos centrados en c y $-c$.

La distribución de Jüttner en la forma (3.1) puede no ser muy conveniente, ya que no es manifiesta-

mente covariante, es decir, no está escrita en términos tensoriales que muestran explícitamente su comportamiento al investigar su descripción en distintos marcos en movimiento relativo, es decir, ante transformaciones de Lorentz. Para poder escribirla de esta forma son necesarias dos piezas clave: la transformación bajo cambio de marcos de referencia de la distribución f y la de la temperatura T . Ambos han sido ampliamente considerados en la literatura [3, 4] y [5, 6, 7, 8, 9], para la temperatura y la función de distribución, respectivamente.

En el caso de la función de distribución es necesario considerar al gas contenido en una caja, para ello se multiplica (3.1) por la *función característica* χ que corresponde al recipiente contenedor del gas, tal que $\chi(\mathbf{x}) = 1$ para \mathbf{x} dentro de la caja, y cero en caso contrario; la distribución resultante $\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) := \chi(\mathbf{x})f(\mathbf{p})$ se define en el espacio fase de una partícula. De esta forma un observador en el sistema de referencia donde el gas está en reposo, define $\bar{f}d^3x d^3p$ como el número de partículas del gas en un volumen de d^3x ubicado en \mathbf{x} y con momento \mathbf{p} en el intervalo d^3p . Además \bar{f} debe ser invariante de Lorentz [9, 7, 10]. Esto se ve fácilmente en el caso del equilibrio [10, 11]. (Para el caso fuera del equilibrio véase [7]): para un gas simple, el número de partículas \mathcal{N} es invariante, por lo que $\mathcal{N} = \int d\mu \bar{f}$, con $d\mu = d^3x d^3p$, debe serlo también. Como $d\mu$ es una medida invariante de Lorentz debido a una compensación entre las transformaciones del momento espacial (por la relación de la capa de masa) y la medida espacial, \bar{f} debe también ser invariante. Ahora bien, como χ es invariante¹, entonces f también lo es. Por lo tanto una forma manifiestamente covariante de f equivale a su invariancia manifiesta y, en particular, debe incluir el comportamiento de la temperatura bajo las transformaciones de Lorentz.

Se ha estudiado la forma invariante de la distribución de Jüttner desde diversas perspectivas [5, 8, 12, 13]. Se determinó mediante la introducción de coordenadas esféricas en la pseudoesfera asociados a la capa de masa en el espacio de cuatro momento relativista. Esto proporcionó un tratamiento elegante y fructífero que sin embargo no parece haber sido plenamente apreciado. También, se han propuesto alternativas a (3.1) donde la covarianza de Lorentz se incorpora de una manera diferente. En [14] Horwitz y colaboradores presentan un enfoque mecánico cuántico que incluye un *tiempo histórico* invariante, éste fue considerado para obtener una ecuación de Boltzmann covariante con una solución estacionaria que lleva una relación entre la temperatura y el promedio de la energía diferente al usual en el caso ultra-relativista, mientras que en [15, 16] un principio de máxima entropía se combinó con un enfoque de teoría de grupo que involucra una cierta medida invariante, para obtener de nuevo una distribución de equilibrio modificada, la cual también se obtiene al considerar la no conservación de partículas [17, 18]. Ambas alternativas han sido criticadas por Debbasch [19].

Es reciente el estudio numérico de los gases relativistas, siendo las primeras simulaciones en dinámica molecular para un gas relativista con dos componentes en una dimensión, las desarrolladas por Cubero y colaboradores [20]. En este trabajo se consideran colisiones elásticas entre partículas con velocidades altas, de forma tal que en el algoritmo usual de Dinámica Molecular se reemplaza el momento no relativista después de la colisión por el correspondiente momento relativista que se obtiene de la conservación del 4-momento. En este caso la temperatura fue definida a través de un

¹Consideremos dos marcos S, S' , con el contenedor del gas situado en S . Con una velocidad relativa v , $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, la contracción de Lorentz del volumen será $V' = \gamma^{-1}V$ lo que lleva a que $\int d^3x' \chi'(x') = \int d^3x \chi(x)$, $d^3x' = \gamma^{-1}d^3x$, lo que demuestra la invariancia de χ .

teorema de equipartición, y demostró ser invariante bajo cambio de marcos de referencia [20]. La importancia de este trabajo radica en que se obtuvo una concordancia entre las simulaciones y la distribución de Jüttner (3.1), indicando así que ésta es la distribución relativista correcta (Ver capítulo de Cubero en este volumen). El estudio del caso de dos dimensiones a lo largo de estas líneas ha sido desarrollada por Montakhab y colaboradores [21] y Alino y colaboradores [22]; para tres dimensiones espaciales en [23]. Para el caso de $d = 3$ Peano y su grupo realizaron simulaciones adaptando al régimen relativista el método de Monte Carlo [18]. Sus resultados también indican que la distribución de Jüttner es la distribución de equilibrio correcta para el gas relativista. Sorprendentemente, en cuanto a la temperatura, este tipo de análisis nos lleva de nuevo a la discusión de muchos años sobre si un objeto en movimiento aparece más frío o más caliente [3, 4, 20, 21].

En este capítulo obtenemos la función de distribución de Jüttner manifiestamente invariante al utilizar coordenadas “cartesianas” en lugar de las coordenadas esféricas en el espacio de momento relativista en $(d+1)$ -dimensiones, esto fue hecho primero en [24]. Este enfoque evita la adopción de algún marco particular, que de lo contrario se plantearía la cuestión de la transformación de Lorentz de la temperatura. Únicamente se alude a la estructura comóvil del gas al final del análisis al relacionar la descripción cinética con la termodinámica, en particular, para identificar la temperatura con la norma invariante de Lorentz de un vector térmico que ya había sido introducido antes con el nombre de vector de enfriamiento relativista, [8, 5, 12, 13] y el cual está formado por el producto del inverso de la temperatura comóvil con la 4-velocidad hidrodinámica del gas, por lo que la temperatura comóvil juega un papel análogo a la masa en reposo de una partícula [25]. Esta interpretación se investiga en relación con el teorema de equipartición, ya que la existencia del vector térmico nos permite escribir una expresión manifiestamente covariante para este teorema. En trabajos previos como los de Tolman [26] y Landsberg [4], se considera una versión del teorema de equipartición que no es covariante manifiesta, obteniendo una expresión para la temperatura que no coincide con el promedio de la energía cinética de las partículas sino con otra cantidad. La versión covariante del teorema de equipartición permitirá interpretar la temperatura comóvil como parte de la energía total del sistema. Esta versión se exploró primero en [27] en relación con la transformación del momento total del gas, que también se revisa en este capítulo. Dentro de la discusión describimos el comportamiento de una distribución Planckiana cuando se hace uso de la temperatura invariante, así como algunas de las dificultades para definir una temperatura no comóvil para un gas de partículas masivas, insistiendo en que la temperatura comóvil invariante parece ser la única posibilidad coherente para definir la temperatura de acuerdo a la teoría cinética relativista estándar.

3.2. Ecuación de Boltzmann relativista

Consideremos un gas simple compuesto por partículas idénticas de masa m en un régimen relativista. Cada partícula tiene coordenadas de espacio-tiempo y cuatro-momento, dadas respectivamente por x^μ y p^μ . La evolución de la función de distribución de una partícula \bar{f} está dictada por

la ecuación de Boltzmann relativista [6, 29, 28]

$$p^\mu \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^\mu} + m \frac{\partial \bar{f} \mathcal{K}^\mu}{\partial p^\mu} = \int (\bar{f}_1^* \bar{f}^* - \bar{f}_1 \bar{f}) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0}, \quad (3.2)$$

donde $\bar{f}_1^* \equiv \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1^*, t)$, * indica una cantidad evaluada después de la colisión; σ es la sección eficaz diferencial del proceso de dispersión, mientras que Ω es el ángulo sólido. \mathcal{K}^μ denota una 4-fuerza externa mientras que F es el llamado *flujo de invariante*, $F = \sqrt{(p_1^\mu p_\mu)^2 - m^4 c^4}$, y $\frac{d^3 p_1}{p_1^0}$ es la medida invariante en la capa de la masa. Estaremos interesados en el caso $\mathcal{K}^\mu = 0$ correspondiente a no tener fuerzas externas. Al lado derecho de (3.2) se le conoce como integral de colisión y se obtiene al realizar un balance de las partículas que entran y salen por colisiones de cierta región del espacio fase [29].

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (3.2) por una función arbitraria $\varphi(x, p)$ e integrar los momentos con la medida $\frac{d^3 p}{p^0}$ se obtiene la llamada ecuación de transferencia

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int \varphi p^\mu \bar{f} \frac{d^3 p}{p^0} - \int \bar{f} \frac{d^3 p}{p^0} \left[p^\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} + m \mathcal{K}^\mu \frac{\partial \varphi}{\partial p^\mu} \right] = \\ \frac{1}{4} \int (\varphi + \varphi_1 - \varphi^* - \varphi_1^*) (\bar{f}_1^* \bar{f}^* - \bar{f}_1 \bar{f}) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3) es la ecuación de balance cuando φ corresponde a una cantidad física.

Si utilizamos la función $\varphi = -k c \ln(\bar{f} h^3) + 1$, con h una constante con dimensiones adecuadas para que el argumento del logaritmo quede sin dimensiones, obtenemos que:

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} = \varsigma, \quad (3.4)$$

donde S^μ es el 4-flujo de entropía y ς es la tasa de producción de entropía que se demuestra que nunca es negativa $\varsigma \geq 0$, [29, 6].

En particular el estado de equilibrio se encuentra cuando no hay producción de entropía [5, 6, 29, 8], que sucede cuando $\bar{f}^* \bar{f}_1^* = \bar{f} \bar{f}_1$, o bien

$$\ln f^* + \ln f_1^* = \ln f + \ln f_1, \quad (3.5)$$

lo cual implica que la integral de colisión de (3.2) se anula. La función característica χ que aparecía en \bar{f} se cancela. La ecuación (3.5) se satisface por las cantidades que se mantienen invariantes durante la colisión². En el caso relativista la ecuación (3.5) se satisface por las componentes del 4-momento; en [29] se prueba que los invariantes colisionales están dados por:

$$\ln f = - \left(\Lambda(x) + \tilde{\Theta}_\mu(x) p^\mu \right) \Leftrightarrow f = \alpha(x) \exp \left(- \tilde{\Theta}_\mu(x) p^\mu \right). \quad (3.6)$$

²Nótese que esto se cumple para interacciones donde se conservan tanto las componentes del momento espacial como la energía, esto sucede en particular en las colisiones binarias elásticas.

donde p^μ es el 4-momento de una partícula del gas, además $\alpha = e^{-\Lambda}$ y $\tilde{\Theta}_\mu$ son independientes de p^μ . La función de distribución de equilibrio se obtiene completamente exigiendo que, al sustituir (3.6) en el lado izquierdo de (3.2) el resultado sea igual a cero. Esta sustitución deja Λ independiente de x^μ y $\partial_\nu \tilde{\Theta}_\mu(x) + \partial_\mu \tilde{\Theta}_\nu(x) = 0$, cuya solución es $\tilde{\Theta}_\mu(x) = \omega_{\mu\nu} x^\nu + \Theta_\mu$ y $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Estos corresponden a los diez vectores de Killing (6 de $\omega_{\mu\nu} x^\nu$ y 4 de Θ_μ) bajo los cuales la métrica espacio-temporal de Minkowski es invariante. Éstos están asociados con las transformaciones de Lorentz y traslaciones espacio-temporales, respectivamente [30].

Como veremos el vector Θ_μ está en la dirección de la 4-velocidad del fluido en su conjunto y por lo tanto, hereda las simetrías de espacio-tiempo en forma de movimientos rígidos: las líneas de mundo de los elementos del fluido vecinos mantendrán su separación siempre que se encuentren a lo largo de vectores de Killing [5], restringiendo los movimientos a traslaciones.

Las funciones α y Θ^μ se determinan al relacionarlas con cantidades físicas a través de los momentos de la distribución. El primer momento corresponde al flujo de densidad de número de partículas N^μ , mientras que el segundo es el tensor de energía-momento del gas, $T^{\mu\nu}$:

$$N^\mu = c \int p^\mu f \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (3.7)$$

$$T^{\mu\nu} = c \int p^\mu p^\nu f \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (3.8)$$

Si se introduce la siguiente integral invariante, conocida como funcional generadora [5]

$$\mathcal{I} \equiv \int e^{-\Theta_\alpha p^\alpha} \frac{d^3 p}{p^0}, \quad (3.9)$$

los momentos de la distribución pueden escribirse como sus derivadas

$$N^\mu = -\alpha c \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \Theta_\mu}, \quad (3.10)$$

$$T^{\mu\nu} = \alpha c \frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial \Theta_\mu \partial \Theta_\nu}. \quad (3.11)$$

La funcional generadora puede evaluarse de diversas formas. Puede expresarse la integral en coordenadas hiper-esféricas en la capa de masa [12, 5, 8]. Al ser \mathcal{I} un invariante, otra forma de evaluarla es utilizando un marco práctico, por ejemplo uno en el que $\Theta^\mu = (\Theta^0, \mathbf{\Theta} = 0)$, [6, 29]; sin embargo, este enfoque plantea la pregunta acerca de cuál es la transformación de Lorentz de la temperatura. Sería deseable poder combinar el enfoque 4-dimensional, con el más intuitivo y más fácil de manejar donde se eligen las componentes cartesianas de Θ^μ , de tal forma que sea posible investigar el comportamiento de la temperatura bajo transformaciones de Lorentz.

Debido a que nuestro análisis es el mismo independientemente del número de dimensiones espaciales, estudiaremos el caso de general en d dimensiones espaciales.

3.2.1. Cálculo de α

Consideremos un marco general no comóvil con el gas de manera que las componentes espaciales de Θ^μ , es decir, Θ , son distintos de cero. En un espacio d -dimensional, \mathcal{I} dada por (3.9), sólo requiere de cambiar la medida de integración de d^3p a $d^d p$. Es posible adoptar coordenadas esféricas para la parte espacial del momento y escoger una dirección espacial particular de tal modo que el producto interno se escribe como $\Theta \cdot \mathbf{p} = |\Theta||\mathbf{p}| \cos \vartheta_1$.

En estas coordenadas tenemos que la medida de integración es: $d^d p = |\mathbf{p}|^{d-1} d|\mathbf{p}| d\Omega^{(d)}$, donde

$$d\Omega^{(d)} = (\sin \vartheta_1)^{d-2} (\sin \vartheta_2)^{d-3} \dots (\sin \vartheta_{d-2})^1 d\vartheta_1 d\vartheta_2 \dots d\vartheta_{d-2} d\varphi = \prod_{i=1}^{d-2} (\sin \vartheta_i)^{d-i-1} d\vartheta_i d\varphi$$

, y los ángulos varían de $0 < \varphi < 2\pi$ y $0 < \vartheta_i < \pi$, [31]. De esta forma \mathcal{I} puede escribirse como

$$\mathcal{I} = S_{d-1} \int \frac{d|\mathbf{p}||\mathbf{p}|^{d-1}}{p^0} (\sin \vartheta_1)^{d-2} d\vartheta_1 e^{-\Theta_0 p^0} e^{|\Theta||\mathbf{p}| \cos \vartheta_1}, \quad (3.12)$$

donde

$$S_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}, \quad (3.13)$$

es la hiper-superficie de una esfera unitaria $(d-1)$ -dimensional [31], que resulta de integrar sobre los ángulos φ y $d\Omega^{(d-1)}$, excluyendo únicamente a ϑ_1 . Para integrar en ϑ_1 es mejor utilizar la serie de la exponencial que contiene el producto de componentes espaciales

$$e^{|\Theta||\mathbf{p}| \cos \vartheta_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\Theta||\mathbf{p}| \cos \vartheta_1)^k}{k!}. \quad (3.14)$$

De esta forma (3.12) puede escribirse como

$$\mathcal{I} = S_{d-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\Theta|^k}{k!} \int_0^\pi \sin \vartheta_1^{d-2} \cos \vartheta_1^k d\vartheta_1 \int e^{-\Theta_0 p^0} \frac{|\mathbf{p}|^{d-1+k}}{p^0} d|\mathbf{p}|. \quad (3.15)$$

La integral angular restante en (3.12) es no trivial sólo para $k = 2n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, esta integral está relacionada con las funciones Beta, $B\left(\frac{2n+1}{2}, \frac{d-1}{2}\right)$ [2], de forma tal que

$$\mathcal{I} = S_{d-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\Theta|^{2n}}{(2n)!} B\left(\frac{2n+1}{2}, \frac{d-1}{2}\right) \int e^{-\Theta_0 p^0} \left[p^{0^2} - m^2 c^2\right]^{\frac{2n+d-2}{2}} dp^0. \quad (3.16)$$

En (3.16) se hizo un cambio de la variable independiente de $|\mathbf{p}|$ por p^0 utilizando la relación de la capa de masa. Si ahora consideramos los cambios de variable³ $y^0 = p^0/mc$ y $z_0 = mc\Theta_0$, junto con la forma integral para las funciones de Bessel modificadas de primera especie [2]:

$$\int_1^\infty e^{-ax} (x^2 - 1)^{j-\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{2}{a}\right)^j \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} K_j(a), \quad (3.17)$$

³Nótese que $y^0 = \gamma$, el factor de Lorentz es la nueva variable de integración.

la ecuación (3.16) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & S_{d-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\Theta|^{2n}}{(2n)!} B\left(\frac{2n+1}{2}, \frac{d-1}{2}\right) (mc)^{2n+d-1} \left(\frac{2}{z_0}\right)^{\frac{2n+d-1}{2}} \times \\ & \times \frac{\Gamma\left(n + \frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} K_{2n+\frac{d-1}{2}}(z_0). \end{aligned} \quad (3.18)$$

En este punto, hacemos las siguientes consideraciones: (i) Utilizamos una expresión conocida de la función Beta en términos de las funciones Gamma [2], (ii) introducimos el vector $z^\mu = mc\Theta^\mu$, junto con $\beta \equiv |\mathbf{z}|/z^0$, $0 \leq \beta < 1$, que se sigue del hecho de que Θ^μ es un vector tipo-tiempo. De esta manera la ecuación (3.18) puede reescribirse como

$$\mathcal{I} = 2^{\frac{d+1}{2}} (mc)^{d-1} \left(\frac{\pi}{z_0}\right)^{\frac{d-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2n} z_0^n \frac{K_{n+\frac{d-1}{2}}(z_0)}{2^n n!}. \quad (3.19)$$

La suma en (3.19) puede reducirse a una función de Bessel modificada al utilizar un teorema de multiplicación de las funciones de Bessel [32], a saber,

$$K_\nu(\lambda x) = \lambda^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (\lambda^2 - 1)^l (\frac{1}{2}x)^l}{l!} K_{\nu+l}(x), \quad (3.20)$$

con $|\lambda^2 - 1| < 1$. Finalmente esto nos lleva a

$$\mathcal{I} = 2(mc)^{d-1} \left(2\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{d-1}{2}} K_{\frac{d-1}{2}}(z). \quad (3.21)$$

donde $z \equiv \sqrt{z^\mu z_\mu}$. La fórmula (3.20) es esencial para intercambiar la serie de funciones de Bessel en (3.19) por una función de Bessel modificada única en (3.21). La ecuación (3.21) se reduce al resultado conocido [12, 5, 8, 6, 29] cuando $d = 3$. De (3.21) vemos que \mathcal{I} es sólo función del invariante $z = mc\Theta$. Ahora podemos obtener el 4-flujo de partículas a partir de (3.10)

$$N^\mu = 2m^d c^{d+1} \alpha \left(2\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{d-1}{2}} K_{\frac{d+1}{2}}(z) \frac{z^\mu}{z}. \quad (3.22)$$

Podemos despejar el escalar α de la ecuación anterior

$$\alpha \equiv \frac{\sqrt{N^\mu N_\mu}}{2c(mc)^d K_{\frac{d+1}{2}}(mc\Theta)} \left(\frac{mc\Theta}{2\pi}\right)^{\frac{d-1}{2}}. \quad (3.23)$$

De la ecuación (3.22) se puede deducir que z^μ y N^μ apuntan en la misma dirección. Notemos que $N^\mu = N\mathcal{U}^\mu/c$, donde $N = \sqrt{N^\mu N_\mu}$; en particular en el marco comóvil $\mathcal{U}^\mu \rightarrow (c, \mathbf{0})$, y entonces $N = nc$, donde n es la densidad de número de partículas en el marco comóvil. Esto implica que

$$\Theta^\mu = \frac{\Theta}{c} \mathcal{U}^\mu. \quad (3.24)$$

3.2.2. Θ^μ y la temperatura invariante

Ahora buscamos identificar Θ^μ con una cantidad termodinámica conocida. Tomemos como punto de partida la forma de Gibbs de la segunda ley de la termodinámica para un sistema cerrado [33, 8], que supondremos válida en el marco comóvil

$$\delta U = T\delta S - P\delta V. \quad (3.25)$$

Debemos relacionar las cantidades estadísticas definidas antes, como el tensor de energía-momento (3.11) y el flujo de entropía (3.4) con la energía interna, U , la entropía, S , la presión P y el volumen V que aparece en (3.25). Para esto vamos a introducir la función de distribución (3.6) y la ecuación (B.32), en la expresión para el tensor de energía-momento (3.11). Esto conduce a

$$T^{\mu\nu} = -\frac{N}{\Theta} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{K_{\frac{d+3}{2}}(mc\Theta)}{K_{\frac{d+1}{2}}(mc\Theta)} \frac{\Theta^\mu \Theta^\nu}{\Theta} mc \right). \quad (3.26)$$

La presión comóvil se puede obtener a partir del tensor de energía-momento en d -dimensiones como

$$P \equiv -\frac{1}{d} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \frac{N}{\Theta}, \quad (3.27)$$

donde el proyector ortogonal a la 4-velocidad hidrodinámica se define como $h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu c^{-2}$. El flujo de la entropía d -dimensional correspondiente se puede reescribir de forma conveniente como:

$$S^\mu = -k [\ln(\alpha h^d) N^\mu - T^{\mu\nu} \Theta_\nu]. \quad (3.28)$$

Es importante mencionar que las cantidades N^μ , $T^{\mu\nu}$ y S^μ son densidades, y por lo tanto no dependen del tamaño del sistema. Sin embargo, para incluir el hecho de que el gas está confinado dentro de una caja, es necesario utilizar la función característica $\chi(x)$ que se definió previamente. En particular, integrando las cantidades antes mencionadas sobre d dimensiones espaciales

$$\mathcal{N} = c^{-1} \int_{\Sigma} N^\mu d\sigma_\mu, \quad (3.29)$$

$$\mathcal{S} = c^{-1} \int_{\Sigma} S^\mu d\sigma_\mu. \quad (3.30)$$

$$\mathcal{G}^\mu = c^{-1} \int_{\Sigma} T^{\mu\nu} d\sigma_\nu, \quad (3.31)$$

donde $d\sigma_\mu = n_\mu d^d x$, con n_μ un vector unitario normal a la hipersuperficie espacial Σ , y por lo tanto un vector de tipo-tiempo. Recordemos que la única dependencia en x^μ es a través de la función característica χ , que está implícita en S^μ , N^μ y $T^{\mu\nu}$.

Para calcular las integrales espaciales anteriores tomamos un hiperplano comóvil con el gas de manera que su normal unitaria esté dada por $n^\mu = \frac{\mathcal{U}^\mu}{c} = \frac{\Theta^\mu}{\Theta}$. Como la 4-velocidad hidrodinámica \mathcal{U}^μ es una propiedad intrínseca del sistema, esta elección ofrece una forma verdaderamente covariante de estas integrales [34]. Notemos que para una elección diferente como $n^\mu = \delta_0^\mu$, que corresponde

3.2. Ecuación de Boltzmann Relativista

al caso de un hiperplano a tiempo fijo, la integral que define al momento total del gas (3.31) daría un vector aparente en lugar de un verdadero vector de Lorentz⁴. Por lo tanto, el número de partículas \mathcal{N} y la entropía S son evidentemente escalares, mientras que G^μ , el momento relativista del gas, es un vector de Lorentz. Integrando (3.28) junto con (3.29)-(3.31) conduce a

$$S = -k [\mathcal{N} \ln (\alpha h^d) - \Theta_\mu G^\mu], \quad (3.32)$$

Ahora podemos hacer contacto con (3.25) evaluando todas las cantidades involucradas en el marco comóvil. Para evaluar la entropía (3.32) en el marco comóvil es necesario considerar (3.24) que, al multiplicarse por G^μ nos lleva a $\Theta_\mu G^\mu \rightarrow \Theta_0 G^0 = \Theta G^0$. La diferencial de la entropía (3.32), en el espacio termodinámico (Θ constante) se convierte en

$$\delta S = k\Theta \left[\delta G^0 - \frac{\mathcal{N}P \delta N}{c N^2} \right] = \frac{k\Theta}{c} [\delta(cG^0) + P\delta V], \quad (3.33)$$

donde se hizo uso de (B.32), (3.27) y la relación $\delta V = -\frac{\mathcal{N}\delta N}{N^2}$. La comparación de (3.25) con (3.33) da lugar a identificar la norma del vector Θ^μ

$$\Theta = \frac{c}{kT}, \quad (3.34)$$

con la temperatura comóvil T . Para esto es necesario interpretar la cantidad cG^0 como la energía interna relativista. Esta identificación es posible debido a que en el régimen de bajas velocidades se tiene que $cG^0 \approx \mathcal{N}mc^2 + U_{\text{no-rel}}$, con $U_{\text{no-rel}}$ la energía interna usual del gas no relativista. Las expresiones (B.32), (3.24) y (3.34) completan el análisis de la función de distribución manifiestamente covariante que, expresada en términos de cantidades invariantes, $N, \Theta, m, c, \Theta^\mu p_\mu$, toma la forma

$$f(p) = \frac{N}{2c(mc)^d K_{\frac{d+1}{2}}(mc\Theta)} \left(\frac{mc\Theta}{2\pi} \right)^{\frac{d-1}{2}} \exp(-\Theta_\mu p^\mu). \quad (3.35)$$

La ecuación (3.35) para $d = 1, 2$ y 3 se reduce a las funciones utilizadas en [20, 21, 22, 23] respectivamente. La ecuación (3.1) se obtiene de (3.35) considerando $d = 3$ y utilizando el marco comóvil al gas. Por otra parte (3.35) coincide con lo obtenido en [17] para dimensión d arbitraria. La distribución relativista del equilibrio también se ha analizado últimamente desde una mecánica estadística relativista, utilizando el procedimiento de maximización de entropía [35] dando la misma distribución de Jüttner covariante.

Cabe destacar sin embargo, que en la deducción de (3.35) no se hicieron hipótesis a priori sobre la transformación de Lorentz de la temperatura. Ésta se encontró al pedir que en el marco comóvil, se cumpliera la termodinámica del equilibrio.

⁴El carácter vectorial ante transformaciones de Lorentz del 4-momento del gas G^μ se estudiará en la siguiente sección.

3.3. Momento total de un Gas relativista

En un trabajo clásico de van Kampen [36], se establece que la energía y momento de un gas no transforman como un vector verdadero ante transformaciones de Lorentz debido a que el gas, al estar confinado en algún recipiente, no es un sistema cerrado ya que interactúa con las paredes de dicho contenedor. Este problema se ha retomado recientemente por Dunkel y colaboradores en [23], haciendo notar que las propiedades de transformación del momento total dependen de la superficie de integración que se elige en (3.31).

Para comprender esta afirmación, uno puede preguntarse sobre el comportamiento de G^μ bajo transformaciones de Lorentz. Para ello, una posibilidad es seguir la misma línea de razonamiento que en el caso del modelo de electrón clásico extendido dado por Rohrlich [34], [37]. Este argumento aclaró la controversia de Abraham-Lorentz sobre el momento relativista del electrón clásico.

Con base en el análisis de [37], el momento total $\mathcal{P}_{\text{total}}^\mu$ del sistema compuesto por el gas y la caja que lo contiene, es un vector de Lorentz conservado que se puede descomponer como la suma de vectores de Lorentz verdaderos o aparentes. Un vector es verdadero si se comporta adecuadamente ante transformaciones de Lorentz; un vector aparente no respeta las transformaciones de Lorentz.

$$\mathcal{P}_{\text{total}}^\mu = G^\mu + \Pi^\mu = G^{(\mu)} + \Pi^{(\mu)}, \quad (3.36)$$

donde (μ) indica que tales objetos son vectores aparentes, y Π^μ es la contribución de la caja al momento total. Como en el caso del modelo clásico del electrón, la diferencia entre verdadero y aparente del 4-momento se establece tal que en el límite no relativista, las componentes de G^μ coinciden exactamente con la energía y el impulso no relativistas del gas, mientras que las componentes de $G^{(\mu)}$ no, [37].

Los conceptos de vector verdadero o aparente, están relacionados con la hipersuperficie que se elige al integrar el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ en (3.31). Cuando se utiliza una hipersuperficie cuya normal unitaria es $\frac{\mathcal{U}^\mu}{c}$, donde \mathcal{U}^μ es la velocidad hidrodinámica, es decir, se utiliza un marco comóvil con el gas, tenemos vectores de Lorentz verdaderos; cuando se utiliza una hipersuperficie que se caracteriza con una normal arbitraria a tiempo fijo δ_0^μ , tendremos vectores aparentes. En el caso de vectores de Lorentz verdaderos, el recipiente que contiene al gas no es necesario para garantizar el carácter de vector verdadero de $\mathcal{P}_{\text{total}}^\mu$, aunque es necesario para explicar el equilibrio del sistema. Así elegimos utilizar la hipersuperficie cuya normal apunta en la misma dirección de la velocidad hidrodinámica $n^\mu = \frac{\mathcal{U}^\mu}{c} = \frac{\Theta^\mu}{\Theta}$, sustituimos esta elección en la definición del momento del gas (3.31), utilizando la expresión del tensor de energía-momento (3.26), obteniendo:

$$G^\mu = \mathcal{N} \frac{\Theta^\mu}{\Theta^2} \left[mc\Theta \frac{K_{\frac{d+3}{2}}(mc\Theta)}{K_{\frac{d+1}{2}}(mc\Theta)} - 1 \right]. \quad (3.37)$$

Por otro al utilizar vectores aparentes sólo la suma de las dos contribuciones del gas y del contenedor forman un vector verdadero (3.36), por esta razón en ese caso la contribución de la caja es esencial. Podemos interpretar lo establecido en [23] y [36], sobre la forma en cómo transforman

3.3. Momento de un Gas relativista

la energía y el momento, diciendo que ahí se utilizaron vectores aparentes en lugar de vectores de Lorentz verdaderos. Con la elección de la normal $n^\mu = \delta_0^\mu$, aunque \mathcal{N} y \mathcal{S} no se alteran, la integral (3.31) del momento resulta un vector aparente que toma la siguiente forma

$$G^{(\mu)} = \frac{\mathcal{N}}{\Theta} \left[mc \frac{K_{\frac{d+3}{2}}(mc\Theta)}{K_{\frac{d+1}{2}}(mc\Theta)} \frac{\Theta^0}{\Theta} \Theta^\mu - \eta^{\mu 0} \right]. \quad (3.38)$$

Es importante notar que (3.37) y (3.38) coinciden únicamente en el marco comóvil $\mathbf{U} = 0$.

Ahora bien, según el argumento en [23], el hecho de tener vectores aparentes se debe a que el gas no es un sistema cerrado sino que interactúa con las paredes del contenedor, por lo tanto el tensor de energía-momento no puede ser una cantidad conservada $\partial_\mu T^{\mu\nu} \neq 0$. No se hace referencia a la elección de la normal a la hipersuperficie.

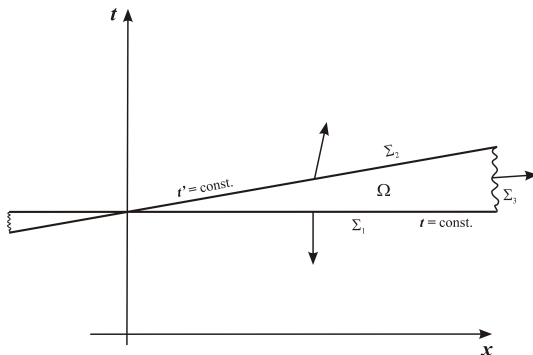


Figura 3.2: Aplicación del teorema de Gauss en la región Ω cuya frontera orientada está formada por hipersuperficies correspondientes a distintos observadores inerciales $\partial\Omega = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$.

De acuerdo a la argumentación usual [11], si $T^{\mu\nu}$ se conserva sus integrales espaciales son independientes de la hipersuperficie espacial Σ que se elija para dicha integración debido al teorema de Gauss:

$$0 = \int_{\Omega} \partial_\mu T^{\mu\nu} d^4x = \oint_{\partial\Omega} T^{\mu\nu} d\sigma_\mu, \quad (3.39)$$

donde Ω es una región espacio-temporal cerrada con $\partial\Omega$ una frontera orientable. Si la frontera se descompone como en Fig. 3.2, entonces $\partial\Omega = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$, donde Σ_2 tiene una normal que apunta en la dirección opuesta a la normal de Σ_1 y Σ_3 es una superficie en infinito que no contribuye a (3.39). Por consiguiente

$$\int_{\Sigma_1} T^{\mu\nu} d\sigma_\mu^{(1)} = - \int_{\Sigma_2} T^{\mu\nu} d\sigma_\mu^{(2)}, \quad (3.40)$$

que implica que el momento del gas es independiente de la hipersuperficie de integración. Si $T^{\mu\nu}$ no se conserva, las integrales espaciales correspondientes evidentemente dependerán de la hipersuperficie que se elija como superficie de integración. La expresión (3.40) nos dice que el momento

del gas estará relacionado por una transformación de Lorentz visto por observadores en los marcos de referencia correspondientes a las hipersuperficies Σ_1 y Σ_2

$$G^\nu = \Lambda^\nu_{\nu'} G^{\nu'}, \quad (3.41)$$

donde $\Lambda^\nu_{\nu'}$ es la matrix asociada a las transformaciones de Lorentz:

$$[\Lambda^\nu_{\nu'}] \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

En este argumento no se ha hecho referencia a la elección de la normal a la superficie de integración ¿Cómo interpretamos entonces (3.40) a la luz de las distintas posibilidades de elegir la normal a la hipersuperficie?

La elección de $n^\mu = \delta_0^\mu$ implica un proceso de medición en superficies con distinta *simultaneidad*. Imaginemos que $T^{\mu\nu}$ se conserva, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Nos preguntamos qué forma debe tener este tensor tal que (3.40) involucre un proceso de medición simultánea en cada marco, es decir si $d\sigma^{\mu(1)} = \delta_0^\mu dV$ y $d\sigma^{\mu(2)} = -\delta_0^\mu dV'$, donde dV y dV' son los elementos de volumen espacial medidos en los marcos de referencia correspondientes a las hipersuperficies Σ_1 y Σ_2 respectivamente, es decir, los integrandos se escribirían

$$T^{0\nu} dV = \Lambda^\nu_{\nu'} T^{0'\nu'} dV'. \quad (3.43)$$

Al involucrar un proceso de medición se requiere que (3.43) sea compatible con la contracción de Lorentz del volumen $dV' = \gamma^{-1} dV$, lo cual implica que el tensor $T^{\mu\nu}$ debe cumplir que

$$\gamma T^{0\nu} = \Lambda^\nu_{\nu'} T^{0'\nu'}, \quad (3.44)$$

es claro que la ecuación (3.44) no se cumple para cualquier tensor, en realidad impone restricciones sobre la forma de $T^{\mu\nu}$ para que éste sea compatible con mediciones y con las transformaciones de Lorentz. La forma que tomaría este tensor, suponiendo isotropía espacial es

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{T} \mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu, \quad \text{con } \mathcal{T} = T^{00} \quad \text{en el marco comóvil.} \quad (3.45)$$

Éste corresponde al tensor de energía-momento de un polvo. En esta interpretación, el teorema de Gauss no sólo implica cierta dependencia en las coordenadas espacio-temporales, sino también la forma que toma el tensor si queremos que sea compatible con mediciones en marcos con diferente simultaneidad. Así para estudiar un gas con un tensor de energía-momento distinto, tendríamos que imponer $\partial_\mu T^{\mu\nu} = \mathcal{P}^\nu$, con \mathcal{P}^ν la contribución de las paredes que introduce factores proporcionales a la presión, de tal forma que al integrarlo cancelará términos en (3.38) para que el momento total (3.36) tome una forma compatible con (3.45), [38]. Ésta es la interpretación seguida por Dunkel. Sin embargo, como desde el comienzo se eligió utilizar como normal aquella que nos da vectores aparentes que no están conectados por una transformación de Lorentz; por lo tanto parece que no es posible sostener el argumento van Kampen y Dunkel, ya que no es el teorema de Gauss lo que define el carácter vectorial sino la elección de la normal.

Por otro lado, podemos preguntarnos sobre la divergencia del tensor de energía-momento (3.26). Recordemos que para calcular $T^{\mu\nu}$ es necesario considerar la función característica $\chi(x)$ que implica que el gas está únicamente en cierta región del espacio V . En general ésta función puede escribirse como

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in V; \\ 0, & x \notin V. \end{cases} \quad (3.46)$$

Para realizar el cálculo de la divergencia consideremos un gas en una dimensión espacial $d = 1$, en este caso, como se ve en [20], la función característica para una caja de tamaño L , puede escribirse como

$$\chi_{1D}(x) = H(x)H(L - x), \quad (3.47)$$

donde $H(x)$ es la función escalón de Heaviside definida como

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

La única dependencia en x del tensor de energía-momento entra a través de la función característica, por tanto la divergencia de $T^{\mu\nu}$ será proporcional a la divergencia de χ , que en $d = 1$ es:

$$\frac{d}{dx} T^{\mu\nu} \propto \frac{d}{dx} \chi_{1D}(x) = \delta(x)H(L - x) - \delta(L - x)H(x), \quad (3.49)$$

donde claramente podemos notar que la derivada de la función característica es distinta de cero. Sin embargo, del lado derecho aparecen distribuciones, por lo tanto el valor particular de la derivada en (3.49) tiene sentido como funciones generalizadas, es decir, hasta realizar una integración:

$$\int \frac{d}{dx} T^{\mu\nu} dx \propto \int [\delta(x)H(L - x) - \delta(L - x)H(x)] dx = 0. \quad (3.50)$$

Es interesante hacer notar que el lado izquierdo de (3.50) es precisamente el lado izquierdo de la ecuación (3.39), es decir, la aplicación del teorema de Gauss para un gas en una caja $d = 1$ implica que el momento total del gas no depende de la superficie de integración que se elija.

Esto no concuerda con la elección de $n^\mu = \delta_0^\mu$, como normal a la hipersuperficie. Una elección de la normal a la hipersuperficie de integración compatible con (3.50), es utilizar una propiedad intrínseca del sistema, es decir, a la velocidad hidrodinámica $n^\mu = \mathcal{U}^\mu/c$. De esta forma no hay ambigüedad en las propiedades de transformación en (3.40) y (3.41) y la interpretación es directa, el momento del gas es un vector verdadero, por lo tanto, está relacionado a través de una transformación de Lorentz para distintos observadores inerciales. Además, es fácil ver que este resultado es válido para cajas cúbicas en cualquier dimensión espacial. El uso de una característica intrínseca al sistema como \mathcal{U}^μ/c , para definir la normal a la hipersuperficie de integración está relacionado con las transformaciones activas y pasivas.

Por otra parte, en [23], Dunkel y colaboradores escogieron realizar las integrales sobre la hipersuperficie invariante del cono de luz pasado de un evento con coordenadas espacio-temporales (ξ^0, ξ^i) . En esta hipersuperficie el momento del gas, según lo calculado en [23] es

$$G_{LC}^\mu = \frac{\mathcal{N}}{\Theta} \left[mc \frac{K_{\frac{d+3}{2}}(mc\Theta)}{K_{\frac{d+1}{2}}(mc\Theta)} \left(\frac{\Theta^0}{\Theta} - \frac{\Theta_i \xi^i}{\Theta \xi} \right) \Theta^\mu - \left(\eta^{\mu 0} - \frac{\eta^{\mu i} \xi_i}{\xi} \right) \right]. \quad (3.51)$$

Aunque, parece ser una manera accesible de definir experimentalmente magnitudes termodinámicas medibles [23], esta propuesta depende de las coordenadas de espacio-tiempo del evento. Si el evento está en el origen del marco comóvil del gas (o de un observador relativo), entonces (3.51) se reduce a (3.38). Anticipamos esta dificultad debido a que se escogió un evento externo para definir las cantidades físicas para el sistema.

3.4. Teorema de equipartición relativista

El Teorema de equipartición de la energía, es un resultado en física no relativista, que relaciona a la temperatura con el promedio de la energía cinética de las partículas que forman el gas. Los primeros trabajos donde se extendió este resultado al ámbito relativista son los de Tolman y Landsberg [26, 4] y una primera observación que se extrae de ellos es que no puede darse la misma interpretación a la temperatura como promedio de la energía, como sucede en el caso no relativista, además de que no están en un lenguaje manifiestamente covariante. Como hemos demostrado en la sección anterior este enfoque revela la conveniencia de utilizar una temperatura invariante asociada con el marco comóvil del gas. Por lo tanto, resulta interesante investigar el papel que juega la temperatura invariante dentro de una formulación manifiestamente covariante del teorema de equipartición relativista.

Las versiones del teorema de equipartición de Tolman y otros [26, 39], se han utilizado como un criterio para determinar la transformación de Lorentz de la temperatura, sin embargo, estos intentos ya habían sido criticados por Landsberg [4] quien hace énfasis en que pueden acomodarse tanto la temperatura invariante, como una temperatura que transforme ante un cambio de marco de referencia, una temperatura móvil. Recientemente Cubero y colaboradores [20] realizaron simulaciones numéricas que indican la existencia de una temperatura invariante sobre la base del teorema de equipartición relativista de [4], refiriéndose entonces a la temperatura invariante incluida en el análisis de Landsberg, pero dejando abierta la posibilidad de la existencia de una temperatura móvil. En esta sección daremos una forma manifiestamente covariante del teorema de equipartición que no sólo contiene una temperatura invariante, sino que incluye la versión de Landsberg de dicho teorema. Por otra parte en esta versión, el teorema es claramente expresado en términos del momento total del gas, de donde puede leerse que hay una parte cinética del momento total que es la contribución relevante al teorema de equipartición.

Comencemos por reexpresar la funcional generadora \mathcal{I} (3.9) en el espacio de energía y momento en $(d + 1)$ -dimensiones [6]

$$\mathcal{I} = 2 \int e^{-\Theta_\mu p^\mu} \delta(p_\sigma p^\sigma - m^2 c^2) H(p^0) d^{d+1} p, \quad (3.52)$$

donde $H(p^0)$ es la función escalón unitario de Heaviside que restringe (3.52) a las energías positivas. La condición de capa de masa se toma en cuenta a través de la distribución delta de Dirac. Lo siguiente es hacer una extensión covariante del argumento original de Tolman [26], que consideraba únicamente la densidad de partículas, aquí hacemos esta extensión debido a que las derivadas de la funcional \mathcal{I} se relacionan con cantidades físicas, en particular la densidad de energía es la

3.4. Teorema de equipartición relativista

componente temporal de su primera derivada. Lo siguiente es integrar por partes $d + 1$ veces, una por cada p^μ . Se descartan los términos de frontera en infinito y obtenemos

$$\mathcal{I} = -\frac{2}{d+1} \int p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\nu} \left[e^{-\Theta_\mu p^\mu} \delta(p_\sigma p^\sigma - m^2 c^2) \right] H(p^0) d^{d+1} p. \quad (3.53)$$

Para integrar sobre p^0 aplicamos las propiedades de la delta de Dirac, que finalmente nos lleva a

$$\mathcal{I} = \frac{1}{d} \int e^{-\Theta_\mu p^\mu} \left[\left(\frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \right)^2 + \Theta_\mu \frac{\partial p^\mu}{\partial p^i} p^i \right] \frac{d^d p}{p^0}. \quad (3.54)$$

Sorprendentemente, y a pesar de que (3.54) contiene los componentes espaciales p_i , (3.54) es una cantidad invariante de Lorentz.

Para conectar (3.54) con las cantidades físicas se inserta \mathcal{I} en (3.10) y (3.11) para obtener

$$N^\alpha = \frac{c}{d} \int \frac{d^d p}{p^0} f \left\{ p^\alpha \left[\left(\frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \right)^2 + p^i \frac{\partial p^\mu}{\partial p^i} \Theta_\mu \right] - p^i \frac{\partial p^\alpha}{\partial p^i} \right\}, \quad (3.55)$$

$$T^{\alpha\beta} = \frac{c}{d} \int \frac{d^d p}{p^0} f \left\{ p^\alpha p^\beta \left[\left(\frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \right)^2 + p^i \frac{\partial p^\mu}{\partial p^i} \Theta_\mu \right] - p^i \frac{\partial p^\alpha p^\beta}{\partial p^i} \right\}. \quad (3.56)$$

Integrando espacialmente de nuevo de (3.55) y (3.56) de acuerdo con (3.29) y (3.31) tenemos

$$d = \Theta_\mu \left\langle \left\langle p^i \frac{\partial p^\mu}{\partial p^i} \right\rangle \right\rangle \quad (3.57)$$

$$G^\alpha = \frac{\mathcal{N}}{d} \left[\Theta_\mu \left\langle \left\langle p^i \frac{\partial p^\mu}{\partial p^i} p^\alpha \right\rangle \right\rangle - \left\langle \left\langle p^i \frac{\partial p^\alpha}{\partial p^i} \right\rangle \right\rangle \right]. \quad (3.58)$$

donde se utilizó $\langle\langle \cdot \rangle\rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} \int \cdot f \chi d^d x d^d p$. Cabe mencionar que la ecuación (3.57) es sólo la forma manifiestamente covariante del teorema de equipartición correspondiente a la propuesta por Tolman y Landsberg [26, 4], respectivamente, expresada utilizando la temperatura invariante comóvil $T = c/k\Theta$, ec. (3.34). Podemos notar que a pesar de que (3.57) contiene la suma espacial $p^i \frac{\partial}{\partial p^i}$, se llega a partir de la ecuación manifiestamente covariante (3.52). Este argumento es válido también para los dos términos en el lado derecho de la ecuación (3.58).

Cuando observamos que ambas ecuaciones (3.57) y (3.58) comparten un término común, esto sugiere la forma como podría insertarse el momento relativista en una expresión del teorema de equipartición covariante. Para proseguir necesitamos determinar el primer término en (3.58), sin embargo, esto lo podemos hacer comparando con la forma explícita el momento del gas calculada en (3.37). Entonces, al igualar la proyección $\Theta_\alpha G^\alpha$ de (3.58) y (3.37) podemos identificar

$$\frac{\Theta_\alpha \Theta_\mu}{d} \left\langle \left\langle p^i \frac{\partial p^\mu}{\partial p^i} p^\alpha \right\rangle \right\rangle = \frac{K_{\frac{d+3}{2}}(mc\Theta)}{K_{\frac{d+1}{2}}(mc\Theta)} mc\Theta, \quad (3.59)$$

de donde finalmente llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{\Theta_\mu G^\mu}{\mathcal{N}} - z = \mathcal{F}_d(z) \equiv z \frac{K_{\frac{d+3}{2}}(z)}{K_{\frac{d+1}{2}}(z)} - 1 - z. \quad (3.60)$$

$\mathcal{F}_d(z)$ se reduce a los valores usuales del teorema de equipartición en los casos límite (ver fig. 3.3),

$$\mathcal{F}_d(z) = \begin{cases} \frac{d}{2}, & z \gg 1, \\ d, & z \ll 1. \end{cases} \quad (3.61)$$

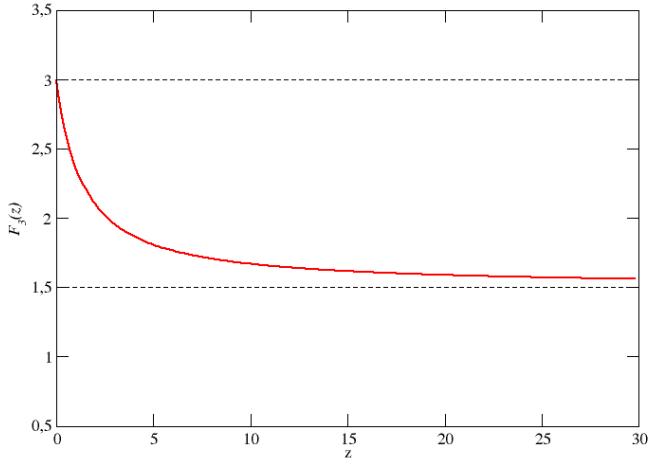


Figura 3.3: La gráfica muestra $\mathcal{F}_d(z)$ vs. $z = mc^2/kT$ para $d = 3$. $\mathcal{F}_3(z)$ corresponde al cociente entre el promedio de la energía cinética relativista por partícula y la temperatura comóvil. Vemos que en los casos $z \gg 1$ y $z \ll 1$ obtenemos los límites adecuados, mientras que para valores intermedios de z , el cociente es de una fracción de entre $3 < \mathcal{F}_3(z) < 3/2$.

Es interesante notar que, en la misma forma que la energía de una partícula con momento p^μ determinado por un observador con velocidad U_{obs}^ν está dado por $E_{\text{obs}} = p_\nu U_{\text{obs}}^\nu$, podemos interpretar $\frac{1}{\Theta} \Theta_\mu G^\mu$ como la energía del gas determinada por el observador comóvil.

De la expresión (3.60), es claro que la temperatura y la energía no son simplemente proporcionales como en el caso no relativista, la energía relativista resulta ser una función complicada de T y la temperatura no es una medida directa de la energía cinética del gas. Sin embargo, de (3.60), la

3.4. Teorema de equipartición relativista

temperatura es útil como un parámetro que determina en qué medida el sistema necesita o no, una descripción relativista. Además, a partir de (3.60) podemos reconocer T como el promedio de una cantidad microscópica que es parte de la energía relativista como vemos en (3.60), que de hecho, en el marco comóvil conduce a

$$kT = \frac{c}{d} \left\langle \left\langle \frac{|\mathbf{p}|^2}{p^0} \right\rangle \right\rangle, \quad (3.62)$$

la ecuación (3.62) es precisamente la expresión utilizada por Tolman [26] y Landsberg [4]. Esta expresión se ha malinterpretado queriendo identificar a p^0 como una masa en movimiento. En el límite no-relativista, podemos aproximar T como

$$\frac{d}{2}kT = \langle \langle \mathcal{K} \rangle \rangle - \left\langle \left\langle \frac{\mathcal{K}^2}{mc^2} \right\rangle \right\rangle + \dots, \quad (3.63)$$

donde \mathcal{K} es la energía cinética no relativista.

Notemos que, si bien versiones del teorema de equipartición relativista habían sido tratados con anterioridad por otros autores [12, 40] su enfoque no era manifiestamente covariante. Su trabajo y el nuestro coinciden en términos de la función \mathcal{F}_d (3.60), en particular al evaluar los casos límite no-relativista y ultra-relativista. Cabe destacar que recientemente cálculos numéricos adoptando el método de Monte Carlo [18] confirman \mathcal{F}_d como la energía cinética relativista en unidades de kT .

La expresión (3.60) se obtuvo multiplicando el momento relativista G^μ por Θ_μ , y restando la energía en reposo total $\mathcal{N}mc\Theta$ para obtener la energía cinética promedio de las partículas del gas. Es fácil ver que (3.60) puede reescribirse como

$$\Theta_\mu \mathcal{K}^\mu = \mathcal{N} \mathcal{F}_d(mc\Theta), \quad (3.64)$$

$$\mathcal{K}^\mu \equiv G^\mu - \mathcal{N}mU^\mu, \quad (3.65)$$

es claro que el momento relativista del gas tiene dos contribuciones. Podemos interpretar el término \mathcal{K}^μ como un 4-momento análogo a la contribución cinética de la energía no relativista, es decir, la parte *cinética* del momento total.

Si hubiéramos utilizado (3.38) como el momento del gas, tendríamos que el producto $\Theta_\mu G^{(\mu)}$ es

$$\Theta_\mu G^{(\mu)} = \mathcal{N} \mathcal{F}_d(mc\Theta) \frac{\Theta^0}{\Theta} + \mathcal{N}mc\Theta^0, \quad (3.66)$$

que sólo coincide con (3.60) en el marco comóvil del gas donde $\Theta^0 = \Theta$. Esto no es sorprendente ya que $G^{(\mu)}$ es un vector aparente y no transforman correctamente bajo transformaciones de Lorentz. Podemos explorar el teorema de equipartición en el cono de luz pasado de un evento, como se propone en [23]:

$$\Theta_\mu G_{LC}^\mu = \mathcal{N} (\mathcal{F}_d(mc\Theta) + mc\Theta) \left(\frac{\Theta^0}{\Theta} - \frac{\Theta_i \xi^i}{\Theta \xi} \right). \quad (3.67)$$

Esta expresión depende del evento elegido, lo cual es algo inusual. Si el evento está en el origen, entonces (3.67) se reduce a (3.66), la ecuación (3.67) coincide con (3.60) sólo en el marco comóvil.

3.5. Discusión

El interés en combinar los principios de la relatividad en la teoría cinética va más allá de los fundamentos teóricos: las observaciones y experimentos recientes como por ejemplo en la física de altas energías [41], en astrofísica [42] y cosmología [43]. En todos estos casos se necesita una descripción de sistemas relativistas de muchas partículas la cual involucra, por ejemplo, la ecuación de Boltzmann y la correspondiente distribución del equilibrio [44, 45, 46]. Recientemente, se han llevado a cabo experimentos numéricos de dinámica molecular y del método de Monte Carlo cuyos resultados apuntan a que la distribución de Jüttner es la distribución relativista correcta para el equilibrio.

En este trabajo hemos obtenido una forma manifiestamente covariante de la función de distribución relativista de Jüttner (3.35), a partir de una nueva deducción en la cual utilizamos coordenadas cartesianas en un espacio de momentos de $(d+1)$ dimensiones (d dimensiones espaciales). Esto fue posible gracias al uso del teorema de multiplicación de las funciones de Bessel (3.20) que simplificó el tratamiento de una serie de funciones de Bessel [32]. En este formalismo del carácter relativista de la temperatura no se establece desde un principio: Debido a la suposición de que el equilibrio en teoría cinética relativista debería estar de acuerdo con la termodinámica estándar para un observador comóvil con el sistema en reposo del gas, la pseudonorma invariante, Θ , del 4-vector Θ^μ (3.24), se convierte en $\Theta = c/kT$, (3.34), siendo T la temperatura comóvil del gas. La temperatura es invariante de la misma forma que la masa en reposo de una partícula puntual. Una discusión similar a la que hay sobre el carácter de T bajo transformaciones de Lorentz [3, 4, 20, 23], pero en el caso de la masa de una partícula puntual, plantea la cuestión de si tiene sentido distinguir entre masa en reposo y masa en movimiento o relativista [25]. La respuesta que da Okun en las referencias [25], es que sólo tiene sentido hablar de m la masa de la partícula, siendo ésta una cantidad independiente del marco de referencia y asociada con la norma del 4-momento $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$. La confusión entre ambos términos aparece cuando se utilizan indistintamente la definición no relativista y relativista del momento. Los experimentos conocidos que dicen medir la variación de la masa relativista, en realidad describen un experimento para determinar las expresiones relativistas correctas para el momento espacial y la energía de partículas en movimiento [47]. Con la temperatura pasa algo similar.

El enfoque que aquí presentamos muestra explícitamente a la simetría de Lorentz como una simetría del sistema. Como sabemos las simetrías son importantes ya que están relacionadas con leyes de conservación (Teorema de Noether [48]). En mecánica estadística no relativista la convención estándar es considerar sistemas macroscópicamente estacionarios, es decir, en un marco de referencia donde tanto su momento espacial y angular son cero y no aparecen en ningún momento en el análisis, es siempre en el marco comóvil al sistema donde se trabaja y se tienen resultados. Según Callen [48] la forma más apropiada de leyes de la termodinámica es aquella en donde aparezcan manifiestamente todas las simetrías del sistema. En el caso relativista esto es claro y el formalismo aquí presentado exhibe la simetría manifiestamente. Sin embargo, hace falta un experimento para confirmar los resultados de el presente enfoque y discriminar entre las demás posibilidades existentes en la literatura [3, 4, 20, 23]. Por ejemplo, de la misma forma que con la masa de una partícula, se requieren experimentos que determinen las expresiones para las componentes espaciales y tem-

poral del vector térmico Θ^μ para un gas en movimiento, además dichos experimentos deben dar un sentido más amplio al significado físico de las componentes de Θ^μ . Para enfrentar este problema hasta ahora sólo contamos con experimentos y simulaciones numéricas [20, 21, 18, 23, 49] cuya interpretación depende de la expresión del teorema de equipartición que se escoja.

En este capítulo también se escribió un teorema de equipartición manifiestamente covariante dado por la ecuación (3.60), en la que el promedio de la energía-momento del gas determinado por el observador comóvil, está dado por la función \mathcal{F}_d de la temperatura invariante, explícitamente (3.60). En efecto, esta expresión resulta análoga a la expresión para la energía en el caso de una partícula puntual, donde la energía se obtiene mediante la proyección del 4-momento a lo largo de la 4-velocidad del observador. En este caso tenemos el vector térmico $\Theta^\mu = \frac{c}{kT} \mathcal{U}^\mu$, con \mathcal{U}^μ la 4-velocidad del gas en su conjunto, que define un observador comóvil el cual mide la temperatura invariante T . Hay que hacer un comentario adicional sobre la diferencia entre nuestro enfoque y algunos anteriores. Mientras que las versiones anteriores del teorema de equipartición [4, 26] relacionan la temperatura con una combinación peculiar de cantidades relativistas (Véase, por ejemplo (3.57)), aquí esta combinación se interpreta como una parte de (3.60) que relaciona la temperatura invariante con el momento relativista promedio, G^μ . En resumen, la forma manifiestamente covariante de la distribución de Jüttner conduce naturalmente a considerar la temperatura comóvil invariante para caracterizar el régimen de equilibrio.

En este punto es importante recordar que la distribución relativista de equilibrio de Jüttner en la forma (3.1) o (3.35) no considera el carácter cuántico ni el grado de degeneración de las partículas que forman el gas. Estas características pueden tomarse en cuenta en una generalización a las distribuciones cuánticas para bosones y fermiones como discutiremos más adelante. Por esta razón el régimen de aplicación de (3.35) es limitado [50]. Sin embargo, la distribución de Jüttner es muy útil como la base del desarrollo de soluciones fuera de equilibrio, así como modelos que aproximan el término de colisión⁵. Además, ha servido para estudiar sistemas más complicados como mezclas de especies reactivas, ondas de choque y muy importante, el caso gravitacional [29]. Recientemente se ha generalizado la distribución de Jüttner para un gas en un marco de referencia acelerado [51] y en una rotación [52].

Como un ejemplo de la manera de aplicar nuestros resultados en casos conocidos, consideremos la radiación de cuerpo negro. Usualmente [44, 43, 11], se considera el cociente entre la intensidad específica I_ν y el cubo de la frecuencia ν de los fotones. Dada la invariancia de Lorentz de esta cantidad $\frac{I_\nu}{\nu^3}$, [11], se sigue la invariancia de la distribución de Planck

$$\frac{I_\nu}{2h\nu^3} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (3.68)$$

De hecho, para dos marcos en movimiento relativo, debemos tener

$$\frac{h\nu}{kT} = \frac{h\nu'}{kT'}, \quad (3.69)$$

donde las cantidades primadas se refieren a un observador que se mueve con respecto a la radiación, en particular, se sugiere que T' es una temperatura no comóvil. Dado que los fotones sufren un

⁵Ver los diversos capítulos que aparecen en este volumen.

desplazamiento Doppler se sigue que

$$\frac{\nu}{\nu'} = \gamma(1 - \beta \cos \delta), \quad (3.70)$$

donde δ es el ángulo entre el impulso del fotón y la velocidad del gas, mientras que β es la relación entre la velocidad del gas y c . La cantidad T' adopta una forma anisotrópica

$$T' = \frac{T}{\gamma(1 - \beta \cos \delta)}. \quad (3.71)$$

Alternativamente podríamos escribir una forma manifiestamente invariante para (3.68) al introducir el vector térmico, con lo que obtendríamos $(e^{\Theta_\mu p^\mu} - 1)^{-1}$. De esta manera podemos fijarnos en el producto invariante $\Theta_\mu p^\mu$. Mediante la evaluación en los dos sistemas de referencia mencionados anteriormente y utilizando que en el caso de fotones $p^0 = |\mathbf{p}'|$

$$\frac{h\nu}{kT} = \Theta'^0 p'^0 (1 - \beta \cos \delta). \quad (3.72)$$

Con la temperatura invariante comóvil T los componentes de Θ^μ resultan ser $\frac{\gamma}{kT}(c, \mathcal{U})$ y por lo tanto (3.72) se reduce a (3.70). Esto demuestra la consistencia de adoptar la temperatura invariante comóvil, a través del vector Θ^μ en la descripción de la radiación del cuerpo negro, sin recurrir a T' , (ver ec. 3.71). Esta última expresión puede ser considerada sólo como una cantidad auxiliar por las siguientes razones: En primer lugar, las observaciones de la Radiación del Fondo Cósmico de Microondas (CMBR) [53] revelan que en realidad hay un marco de referencia en el que este presenta la estructura del cuerpo negro. Sin embargo, las mediciones involucran el brillo dependiendo de la frecuencia en lugar de una temperatura no comóvil (3.71). En segundo lugar, en el caso de las partículas masivas encontramos un obstáculo al intentar definir (3.71) (Véase, [54] y la contribución del J. Alfaro para este volumen). Para las partículas masivas tendríamos

$$T' = \frac{T}{\gamma(1 - \beta_p \beta \cos \delta)}, \quad \beta_p = \frac{|\mathbf{p}|}{p^0}, \quad (3.73)$$

que no tiene sentido físico debido a la dependencia en el momento de las partículas. Sin embargo la utilización de una temperatura comóvil invariante es viable por la misma razón que el caso anterior de los fotones funciona.

Este trabajo se suma a las afirmaciones elaboradas sobre la base de un detector de Unruh-DeWitt [55], que apunta a la imposibilidad de tener una transformación relativista de la temperatura para la radiación [56]. Un análisis similar al presentado aquí se encuentra en un trabajo reciente de Nakamura [57]. Ahí se utiliza el vector térmico y se argumenta su utilidad en contraste con la temperatura direccional, como en (3.71). En cualquier caso, todos estos resultados refuerzan la idea de que la temperatura tiene sentido indiscutible en el marco comóvil.

Para estudiar de manera precisa la distribución de Planck, deberíamos considerar el límite ultra-relativista de la distribución de equilibrio correspondiente a bosones, es decir debemos extender el estudio para que contenga las estadísticas cuánticas, donde las aplicaciones más interesantes se

3.5. Discusión

encuentran en sistemas cuánticos degenerados [6, 29]. Estas se toman en cuenta en la ecuación relativista de *Uehling-Uhlenbeck* [29, 58],

$$p^\mu \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^\mu} + m \frac{\partial (\bar{f} \mathcal{K}^\mu)}{\partial p^\mu} = \int \left[\bar{f} \bar{f}_1^* \left(1 + \epsilon \frac{\hbar^3}{g_s} \bar{f} \right) \left(1 + \epsilon \frac{\hbar^3}{g_s} \bar{f}_1 \right) - \bar{f} \bar{f}_1 \left(1 + \epsilon \frac{\hbar^3}{g_s} \bar{f}^* \right) \left(1 + \epsilon \frac{\hbar^3}{g_s} \bar{f}_1^* \right) \right] F \sigma_Q d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0}, \quad (3.74)$$

donde g_s es el factor de degeneración de espín y σ_Q es la correspondiente sección transversal que se calcula a través de la teoría cuántica de dispersión. Las demás cantidades son análogas a aquellas definidas en la ecuación (3.2). El valor $\epsilon = -1$ corresponde al caso de la estadística de Fermi-Dirac, $\epsilon = +1$ a la de Bose-Einstein y $\epsilon = 0$ a la estadística clásica. De la misma forma que en el caso clásico usual estudiado aquí podemos obtener la distribución del equilibrio, anulando el término de colisión del lado derecho de (3.74), lo que lleva a la siguiente condición

$$\ln \frac{f}{1 + \epsilon \frac{\hbar^3}{g_s}} = -(\Lambda + \Theta_\alpha p^\alpha) \Leftrightarrow f = \frac{g_s / \hbar^3}{\exp(\tilde{\Lambda} + \Theta_\alpha p^\alpha) - \epsilon}, \quad (3.75)$$

donde $\tilde{\Lambda} = \Lambda + \ln g_s / \hbar^3$. De la misma forma en que identificamos la temperatura en el marco comóvil, se ha mostrado que en el marco comóvil el escalar anterior es $\tilde{\Lambda} = \frac{\mu}{kT}$, donde μ es el potencial químico comóvil [29], de esta forma la distribución resultante es

$$f = \frac{g_s / \hbar^3}{e^{\Theta_\alpha p^\alpha - \frac{\mu}{kT}} - \epsilon}. \quad (3.76)$$

Donde se ha identificado la norma de Θ^μ con la temperatura invariante en un sistema comóvil con el gas. Ahora bien, como la temperatura está relacionada con la norma de un 4-vector podemos pensar que el vector térmico puede factorizarse como $\tilde{\Lambda} = \Theta^\alpha \mathcal{M}_\alpha$, donde introducimos

$$\mathcal{M}^\alpha = \frac{\mu}{c^2} \mathcal{U}^\alpha, \quad (3.77)$$

cuya norma está relacionada con el potencial químico en el marco comóvil $\mathcal{M}^\alpha \mathcal{M}_\alpha = \mu^2 / c^2$. En particular para la estadística de Jüttner $\epsilon = 0$ obtenemos

$$\mathcal{M}^\alpha = \frac{kT}{c^2} \ln [\alpha h^d g_s^{-1}] \mathcal{U}^\alpha, \quad (3.78)$$

donde α está definida por (B.32). La existencia de \mathcal{M}^α implica que para aumentar el número de partículas, es necesario considerar, además del potencial químico, el movimiento del sistema como un todo. Como para fotones $\mu_\gamma = 0$, la discusión anterior sobre la distribución de Planck se mantiene. La suposición de la existencia de \mathcal{M}^α debe estar de acuerdo con las posibles generalizaciones a las leyes de la termodinámica.

Esta versión manifiestamente covariante de la teoría cinética ofrece un formalismo que, además de provenir de la dinámica de los constituyentes microscópicos, parece no tener ambigüedades en la

definición de cantidades macroscópicas, como en algunos trabajos sobre termodinámica relativista [8, 33, 7, 59]. De este modo podemos discutir la posibilidad de generalizar la forma de Gibbs de la primera ley de la termodinámica que en el caso no relativista está dada por (3.25). Es claro que la diferencial en el espacio termodinámico de la entropía (3.32), en un marco no comóvil nos dará

$$\delta S = k \left[\Theta_\mu \delta G^\mu - \mathcal{N} \frac{N_\mu \delta N^\mu}{N_\nu N^\nu} \right], \quad (3.79)$$

que se reduce a (3.25) en el límite no relativista en el marco comóvil utilizando la relación $\delta V = -c(\mathcal{N} N^\mu \delta N_\mu)/(N^\nu N_\nu)^{3/2}$. Podemos considerar la ecuación (3.79) como una generalización manifiestamente covariante de la forma Gibbs de la segunda ley de la termodinámica obtenida a partir de la teoría cinética relativista.

Es interesante mencionar, entre las generalizaciones relativistas a la primera ley de la termodinámica, se encuentran algunos trabajos, [7], [37], [59], [60] donde se introduce un vector de volumen que apunta en la dirección de la velocidad del gas $V^\mu \equiv V U^\mu/c$, tal que su norma es $V = \sqrt{V_\mu V^\mu}$. Además, se puede demostrar que $\delta V^\mu = -(c \mathcal{N} \delta N_\mu)/N^\nu N_\nu$, y junto con el hecho de que Θ^μ apunta en la misma dirección que N^μ , podemos factorizar el vector térmico en (3.79) de tal forma que obtenemos

$$\delta S = k \Theta_\mu \left[\delta G^\mu + \frac{P}{c} \delta V^\mu \right], \quad (3.80)$$

que es una expresión utilizada por otros autores como una forma covariante de la expresión de Gibbs para la segunda ley de la termodinámica [59]. Otras versiones de las leyes de la termodinámica relativista se encuentran, por ejemplo en [8], [33], [7], [57]. Sin embargo, ambas expresiones (3.79) y (3.80), provienen de una teoría microscópica, y puede considerarse que tienen una base fuerte respecto a otras opciones que son una extrapolación de la fenomenología de la termodinámica comóvil. Por ejemplo, es fácil ver que la introducción de un potencial químico y su correspondiente vector añadirían a (3.79)-(3.80) un término de la forma $\Theta^\mu \mathcal{M}_\mu \delta \mathcal{N}$.

Como hemos visto, es importante destacar que las propiedades de transformación de las variables termodinámicas dependen del carácter vectorial de G^μ . En ese sentido la versión manifiestamente covariante puede jugar un papel importante para hallar una generalización adecuada relativista de las leyes de la termodinámica. Sin embargo, lo que realmente dirá cuál es la generalización correcta es el experimento.

Agradecimientos

Se agradece el apoyo parcial del proyecto CONACYT No. 167563 y PROMEP 47510283.

Bibliografía

- [1] F. Jüttner, Ann. Physik und Chemie **34**, 856 (1911); F. Jüttner, Ann. Physik und Chemie **35**, 145 (1911); F. Jüttner, Zeitschr. Phys. **47**, 542 (1928). Ver traducciones a los artículos

3.5. Bibliografía

originales que aparecen al final de este volumen.

- [2] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover (1968).
- [3] A. Einstein, *Jahrb. Radioakt. Elektron.* **4**, 411 (1907); M. Planck, *Ann. Physik* **26**, 1 (1908); H. Ott, *Z. Physik* **175**, 70 (1963); A. Arzelies, *Nuovo Cimento* **35**, 792 (1965); P. T. Landsberg, *Nature (London)* **212**, 571 (1966).
- [4] P. T. Landsberg, *Nature (London)* **214**, 903 (1967).
- [5] W. Israel, *J. Math. Phys.* **4**, 1163-1181 (1963).
- [6] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen and Ch. G. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory*. North-Holland, Amsterdam (1980).
- [7] N. G. van Kampen, *Physica (Utrecht)* **43**, 244 (1969).
- [8] G. Neugebauer, *Relativistische Thermodynamik* (Akademic-Verlag, Berlin, 1980).
- [9] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. A* **106**, 581 (1924).
- [10] F. Debbasch, J. P. Rivet and W. A. van Leeuwen, *Physica A* **301**, 181 (2001).
- [11] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman and Company New York (1973).
- [12] J. L. Synge, *The Relativistic Gas*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1957).
- [13] J. M. Stewart, *Non-equilibrium relativistic kinetic theory*. Lecture Notes in Physics Vol. 10 Springer, Heidelberg (1971).
- [14] L. P. Horwitz, S. Shashoua, and W. C. Schieve, *Physica A* **161**, 300 (1989).
- [15] E. Lehmann, *J. Math. Phys.* **47**, 023303 (2006).
- [16] J. Dunkel, P. Talkner and P. Hänggi, *New J. Phys.* **9**, 144 (2007).
- [17] D. Cubero and J. Dunkel, *EuroPhys. Lett.* **87**, 30005 (2009).
- [18] F. Peano, M. Marti, L. O. Silva and G. Coppa, *Phys. Rev. E* **79**, 025701(R) (2009).
- [19] F. Debbasch, *Physica A* **387**, 2443 (2008).
- [20] D. Cubero, J. Casado-Pascual, J. Dunkel, P. Talkner and P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 170601 (2007).
- [21] A. Montakhab, M. Ghodrati, and M. Barati, *Phys. Rev. E* **79**, 031124 (2009).
- [22] A. Aliano, L. Rondoni and G. P. Morriss, *Eur. Phys. J. B* **50**, 361 (2006).

- [23] J. Dunkel, P. Hänggi and S. Hilbert, *Nature Phys.* **5**, 741 (2009).
- [24] G. Chacón-Acosta, L. Dagdug and H. Morales-Técotl, *Phys. Rev. E* **81**, 021126 (2010).
- [25] L. B. Okun, *Physics Today* **31**, 11 (1989), L. B. Okun, *Sov. Phys. Usp.* **32**, 629 (1989).
- [26] R. C. Tolman, *Phil. Mag. (Series 6)*, **28**, 583-600 (1914); R. C. Tolman, *Phys. Rev.* **11**, 261 (1918).
- [27] G. Chacón-Acosta, L. Dagdug and H. Morales-Técotl, *AIP Conf. Proc.* **1256**, 231-238 (2010).
- [28] A. L. García-Perciante, A. Sandoval-Villalbaz and L. S. García-Colín, *Physica A* **387**, 5073 (2008).
- [29] C. Cercignani and G. M. Kremer, *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*. Progress in Mathematical Physics Vol. 22 Springer-Verlag, Birkhäuser, Basel, (2002).
- [30] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley and Sons, New York, 1972).
- [31] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics* (Butterworth-Heinemann, 2001).
- [32] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, 1966).
- [33] R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology* (Dover, New York, 1987).
- [34] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles* (Addison-Wesley Publishing Inc., 1965).
- [35] T. K. Nakamura, *EuroPhys. Lett.* **88** 40009 (2009).
- [36] N. G. van Kampen, *Phys. Rev.* **173**, 295 (1968).
- [37] F. Rohrlich, *Nuovo Cim.* **45B**, 76 (1966); *Am. J. Phys.* **28**, 639 (1960).
- [38] R. Hakim y A. Mangeney, *Lett. Nuovo Cim.* **1**, 429 (1969).
- [39] A. Komar, *Gen. Rel. Grav.* **28**, 379 (1996); P. T. Landsberg, *Am. J. Phys.* **60**, 561 (1992); V. J. Menon and D. C. Agrawal, *Am. J. Phys.* **59**, 258 (1991).
- [40] D. Ter Haar and H. Wergeland, *Phys. Rep.* **1**, 31 (1971).
- [41] H. van Hees, V. Greco, and R. Rapp, *Phys. Rev. C* **73**, 034913 (2006); P. Huovinen and D. Molnar, *Phys. Rev. C* **79**, 014906 (2009); W. Florkowski, W. Broniowski, M. Chojnacki and A. Kisiel, *Acta Phys. Polon. B* **40** 1093 (2009).
- [42] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Dover Publications Inc. (1958).

- [43] S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, 2008).
- [44] J. A. Peacock, *Cosmological Physics*. Cambridge University Press (1999). E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*. Paperback Ed. Westview Press (1994).
- [45] J. Bernstein, *Kinetic Theory in the Expanding Universe*. Cambridge University Press, Paperback Ed. (2004).
- [46] R. A. Sunyaev and Y.B. Zeldovich, *Comments Astrophys. Space Phys.* **4**, 173 (1972); M. Jones *et al.*, *Nature (London)* **365**, 320 (1993); M. Birkinshaw, S. F. Gull, and H. Hardebeck, *Nature (London)* **309**, 34 (1984); N. Itoh, Y. Kohyama, S. Nozawa, *Astrophys. J.* **502**, 7-15 (1998).
- [47] P. S. Faragó and L. Jánossy, *Nuovo Cim.* **5** 1411 (1957); D. D. Meyerhofer, J. P. Knauer, S. J. McNaught and C. I. Moore, *J. Opt. Soc. Am.* **B 13**, 113 (1996); J. W. Luetzelschwab, *Am. J. Phys.* **71**, 878 (2003); G. J. Aubrecht II, *Am. J. Phys.* **72**, 970 (2004).
- [48] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. John Wiley and Sons Inc. (1985).
- [49] M. Mendoza, B. Boghosian, H. J. Herrmann and S. Succi, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 014502 (2010).
- [50] I. Müller, T. Ruggeri, *Extended Thermodynamics* (Springer, New York, 1993).
- [51] D. J. Louis-Martinez, *Class. Quantum Grav.* **28**, 035004 (2011).
- [52] F. Becattinia, and L. Tinti, *Annals of Physics*, **325**, 1566 (2010).
- [53] G. F. Smoot, M. V. Gorenstein and R. A. Muller, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 898 (1977); D. J. Fixen *et al.*, *Astrophys. J.* **420**, 445 (1994); D. J. Fixen *et al.*, *Astrophys. J.* **473**, 576 (1996).
- [54] J. Alfaro and P. González, *Int. J. Mod. Phys. D* **17**, 2171 (2008).
- [55] S. S. Costa and G. E. A. Matsas, *Phys. Lett. A* **209**, 155 (1995).
- [56] P. T. Lansberg and G. E. A. Matsas, *Phys. Lett. A* **223**, 401 (1996); P. T. Lansberg and G. E. A. Matsas, *Physica A* **340**, 92 (2004).
- [57] T. K. Nakamura, *EuroPhys. Lett.* **88** 20004 (2009).
- [58] E. A. Uehling and G. E. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **43**, 552-561 (1933).
- [59] T. K. Nakamura, *Phys. Lett. A* **352** 175 (2006).
- [60] Z. C. Wu, *EuroPhys. Lett.* **88** 20005 (2009).

Estabilidad termodinámica de fluidos relativistas y su relación con la teoría cinética a primer orden en los gradientes

Alfredo Sandoval Villabazo

Departamento de Física y Matemáticas, Universidad Iberoamericana, Prolongación Paseo de la Reforma 880, México D. F. 01219, México.

alfredo.sandoval@uia.mx

Ana Laura García Perciante

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas, Universidad Autónoma Metropolitana-Cuajimalpa, Artificios 40, México D. F. 01120, México.

algarcia@correo.cua.uam.mx

Resumen

En este trabajo se presenta de una manera didáctica el estudio de la estabilidad de un fluido simple relativista frente a perturbaciones lineales en los valores de las variables termodinámicas locales. Se resalta el hecho de que las llamadas inestabilidades genéricas de Hiscock y Lindblom tienen como causa el acoplamiento calor-aceleración propuesto por Eckart en 1940. Finalmente se discuten las alternativas para solucionar el problema de las inestabilidades genéricas privilegiándose el uso de formalismos a primer orden en los gradientes.

4.1. Introducción

Desde hace más de cien años se sabe que los fluidos monocomponentes no relativistas presentan estabilidad termodinámica frente a perturbaciones lineales a su estado de equilibrio termodinámico. Efectos disipativos tales como la viscosidad y el flujo de calor amortiguan la propagación ondulatoria de energía asociada a perturbaciones de densidad, temperatura y/o velocidad hidrodinámica, de forma tal que este tipo de fluctuaciones exhibe un decaimiento exponencial en el tiempo [1]. Los tiempos característicos correspondientes a este comportamiento son inversamente proporcionales a los valores de los coeficientes de transporte y directamente proporcionales a la separación espacial entre los elementos constituyentes del fluido [2].

En 1985 [3], Hiscock y Lindblom mostraron que el fluido simple relativista carece de un límite no relativista apropiado al considerarse las ecuaciones linealizadas de la termodinámica irreversible relativista aceptada desde 1940 hasta esa fecha [4]. En consecuencia, el trabajo de Hiscock y Lindblom dio lugar a un intenso debate sobre la forma adecuada de formular la teoría de transporte relativista para un fluido simple [5].

En este contexto, los autores de la presente contribución, junto con el Dr. Leopoldo García-Colín Scherer, hemos examinado la posibilidad de establecer una teoría estable para el fluido simple relativista, utilizando exclusivamente ecuaciones constitutivas lineales, consistentes con el método de Chapman y Enskog de la teoría cinética relativista [6]. Hasta ahora, los resultados han sido alentadores. En el presente capítulo se presenta una síntesis didáctica de los trabajos desarrollados en esta vertiente desde el año 2006, comenzando con el desarrollo fenomenológico que conduce a las inestabilidades genéricas de Hiscock y Lindblom, hasta establecer el esquema estable a primer orden en los gradientes obtenido en el año 2009. Por razones de espacio, el lector deberá remitirse a las fuentes originales si desea consultar detalles inherentes a los desarrollos correspondientes al material aquí contenido.

4.2. Ecuaciones fenomenológicas

El presente análisis tiene como punto de partida el tensor de esfuerzos-energía relativista, el cual incluye efectos disipativos y está dado por

$$T_{\beta}^{\alpha} = \frac{n\varepsilon}{c^2}u^{\alpha}u_{\beta} + ph_{\beta}^{\alpha} + \Pi_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{c^2}u^{\alpha}q_{\beta} + \frac{1}{c^2}q^{\alpha}u_{\beta} \quad (4.1)$$

donde n corresponde a la densidad numérica, ε es la densidad de energía interna por partícula, u^{α} es la velocidad hidrodinámica, p es la presión hidrostática local, Π_{β}^{α} corresponde al tensor de viscosidades (tensor de Navier), q^{α} representa al flujo de calor, y el proyector espacial está dado por $h_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{c^2}u^{\alpha}u_{\beta}$. La forma de este tensor es consistente con la teoría cinética relativista así como con la fenomenología en el contexto de una descomposición 3+1 en la cual se toman como direcciones principales la velocidad u^{ν} y su hipersuperficie ortogonal determinada por $h^{\mu\nu}$. Los detalles de dicha fundamentación pueden ser consultados en la Ref. [7].

Tanto el flujo de partículas, dado por

$$N^\alpha = nu^\alpha \quad (4.2)$$

como el tensor de esfuerzos-energía, Ec. (4.1), satisfacen ecuaciones de conservación:

$$N^\alpha_{;\alpha} = 0 \quad (4.3)$$

y

$$T^\alpha_{\beta;\alpha} = 0 \quad (4.4)$$

La Ec. (4.3) corresponde con la conservación del número de partículas mientras que las cuatro ecuaciones contenidas en la Ec. (4.4) dan lugar al balance de ímpetu y de energía total. El balance de energía interna local puede establecerse a partir de la proyección de la Ec. (4.4) en la dirección de la velocidad. Introduciendo entonces la Ec. (4.3) en $u^\beta T^\alpha_{\beta;\alpha} = 0$ se obtiene

$$n\dot{\varepsilon} + p\theta + q^\alpha_{;\alpha} + \Pi^\alpha_\beta u^\beta_{;\alpha} + \frac{1}{c^2} q_\alpha \dot{u}^\alpha = 0 \quad (4.5)$$

El último término de la ecuación (4.5) posee un origen estrictamente relativista y, como se verá más adelante, se encuentra estrechamente relacionado con las inestabilidades genéricas encontradas por Hiscock y Lindblom.

Para el balance de entropía se considera el principio de equilibrio local, $s = s(n, \varepsilon)$, de forma tal que:

$$\dot{s} = \left(\frac{\partial s}{\partial n} \right)_\varepsilon \dot{n} + \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \right)_n \dot{\varepsilon} \quad (4.6)$$

donde s es la densidad de entropía y los coeficientes se calculan en equilibrio. Esta expresión se compara a su vez con la estructura general

$$\dot{s} = -S^\alpha_{;\alpha} + \sigma \quad (4.7)$$

donde S^α es el cuadriflujo correspondiente a la variable termodinámica s y σ es la llamada producción de entropía. La extensión de la segunda ley de la termodinámica a procesos irreversibles se da en términos de σ como $\sigma \geq 0$ [1].

Para el caso del gas ideal, los coeficientes de la Ec. (4.6) están dados por

$$\left(\frac{\partial s}{\partial n} \right)_\varepsilon = -\frac{p}{n^2}, \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \right)_n = \frac{1}{T}, \quad (4.9)$$

mientras que el flujo de entropía tiene la forma usual

$$S^\alpha = \frac{q^\alpha}{T} \quad (4.10)$$

4.3. Sistema linealizado y análisis de estabilidad

Introduciendo las Ecs. (4.8-4.10) en la Ec. (4.6) se obtiene la siguiente expresión para la producción de entropía

$$\sigma = -\frac{q^\alpha h_\alpha^\mu (T_{,\mu} + \frac{T}{c^2} a_\mu)}{T^2} - \frac{\Pi^{\alpha\beta} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu u_{;\mu\nu}}{T} . \quad (4.11)$$

Como se mencionó anteriormente, la segunda ley de la termodinámica requiere que la producción de entropía local σ , correspondiente a la ecuación (4.11), sea semidefinida positiva. La alternativa propuesta por Eckart para que esto se cumpla corresponde a la ecuación

$$q^\alpha = -\kappa h_\nu^\alpha (T^{,\nu} + \frac{T}{c^2} a^\nu) \quad (4.12)$$

y una ecuación análoga para el segundo término cuya forma explícita no requiere ser especificada en el presente trabajo [4]. Esta estructura corresponde a proponer, como en caso no relativista, ecuaciones constitutivas que expresen σ como una forma cuadrática en los gradientes. Sin embargo es conveniente observar que en dicho caso la ecuación análoga a la Ec. (4.11) sólo incluye gradientes de las variables de estado y por lo tanto las ecuaciones constitutivas acoplan los flujos disipativos a las fuerzas termodinámicas únicamente.

En la siguiente sección se examinan las propiedades de estabilidad de la versión linealizada de las Ecs. (4.3-4.5) en la representación n , u^α y T haciendo uso de la ecuación constitutiva de Eckart, Ec. (4.12), con el fin de mostrar que el origen del comportamiento patológico encontrado por Hiscock y Lindblom proviene del uso de la Ec. (4.12) y no del orden en los gradientes del formalismo.

4.3. Sistema linealizado y análisis de estabilidad

Para explorar el comportamiento del sistema relativista ante fluctuaciones espontáneas de las variables de estado en torno a sus valores de equilibrio, se propone que éstas pueden ser escritas como

$$n = n_0 + \delta n \quad (4.13)$$

$$u^\nu = \delta u^\nu \quad (4.14)$$

$$T = T_0 + \delta T \quad (4.15)$$

donde los términos con subíndice cero corresponden a los valores de equilibrio local y los precedidos por δ a las fluctuaciones de cada variable termodinámica. Nótese que el valor promedio de la velocidad hidrodinámica se toma igual a cero. Esto se debe a que, por simplicidad, uno puede considerar un fluido estático o bien el observador situarse en el marco de referencia comóvil al mismo. La Ref. [8] contiene una descripción detallada de la física detrás de dicha elección así como una discusión sobre la validez de la misma.

Introduciendo las Ecs. (4.13-4.15) en el sistema de ecuaciones para el fluido, dadas por las Ecs. (4.3-4.4), se obtiene un nuevo sistema para la fluctuaciones en el cual, para la aproximación lineal, se desprecian los términos de orden superior a uno en las mismas. Para que dicho sistema satisfaga la hipótesis de regresión de fluctuaciones de Onsager debe tener soluciones que decaigan exponencialmente en el tiempo esto es, que las fluctaciones espontáneas (que son de origen microscópico)

alrededor de los valores de equilibrio decaigan siguiendo las mismas ecuaciones linealizadas de las variables de estado. Dicha hipótesis es fundamental en la termodinámica irreversible lineal [1] y ha sido corroborada por medio de experimentos de dispersión de luz en fluidos en equilibrio, en el caso no relativista [2].

Para simplificar el cálculo, se observa que la ecuación de continuidad y el balance de energía interna dependen de la velocidad hidrodinámica únicamente a través de su divergencia $\theta = u_{;\nu}^{\nu}$. Por ello, es posible desacoplar el llamado modo transversal de las fluctuaciones en la velocidad al calcular el rotacional del balance de ímpetu. En la Ref. [9] se estudia dicha ecuación y se analiza el efecto del acoplamiento calor-aceleración sobre la estabilidad del modo transversal.

Por otra parte, calculando la divergencia de la Ec. (4.4) se obtiene un sistema de ecuaciones para δn , δT y $\delta\theta$ (modo logitudinal) dado por

$$\delta\dot{n} + n_0\delta\theta = 0 \quad (4.16)$$

$$\left(\frac{n\varepsilon_0}{c^2} + \frac{p_0}{c^2}\right)\delta\dot{\theta} + \frac{p_0}{T_0}(\delta T^{;\mu})_{;\mu} + \frac{p_0}{n_0}(\delta n^{;\mu})_{;\mu} - \frac{\kappa}{c^2}(\delta\dot{T}^{;\mu} + \frac{T_0}{c^2}\delta\ddot{\theta}) = 0 \quad (4.17)$$

$$nC_n\delta\dot{T} + p_0\delta\theta - \kappa(\delta T^{;\nu})_{;\nu} + \frac{T_0}{c^2}\delta\dot{\theta} = 0 \quad (4.18)$$

donde se ha introducido también la ecuación constitutiva (4.12) y se han ignorado los efectos viscosos. Esto último corresponde a considerar un fluido invíscido, lo cual no alterará los resultados del presente análisis dado que el mismo está enfocado al grado de la ecuación de dispersión del sistema. Los detalles del cálculo tomando en cuenta los efectos viscosos se pueden consultar en las Refs. [6] y [10]. También se ha utilizado la ecuación de estado de gas ideal $p_0 = n_0kT_0$ la cual es válida a nivel local para un sistema relativista diluido.

Calculando la transformada de Fourier-Laplace del sistema dado por las Ecs. (4.16-4.18) se establece que el comportamiento de las fluctuaciones está determinado por las raíces de la ecuación de dispersión que a su vez está dada por

$$\det \begin{pmatrix} s(\tilde{\rho}_0 - \frac{\kappa T_0}{c^4}s) + \frac{1}{s}q^2p_0 & q^2\left(\frac{\kappa}{c^2}s - \frac{p_0}{T_0}\right) \\ (p_0 - \frac{\kappa T_0 s}{c^2}) & (n_0C_n s + \kappa q^2) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.19)$$

La primera columna de esta matriz corresponde a las fluctuaciones en el modo longitudinal de la velocidad y la segunda columna corresponde a las fluctuaciones de la temperatura. Dicho determinante es consistente con la idea de considerar una dependencia del tipo $\exp(iq^\ell x_\ell - st)$ para las fluctuaciones en n , T y θ de forma tal que valores reales de q corresponderán a oscilaciones en el espacio mientras que el signo de s les dará un carácter creciente o decreciente en el tiempo. En la Ec. (4.51) se ha introducido la notación

$$\tilde{\rho}_0 = \frac{1}{c^2}(n\varepsilon_0 + p_0) \quad (4.20)$$

que es el factor que reemplaza a la densidad de masa en el caso relativista. Nótese que para temperaturas bajas, la densidad de energía interna será dominada por el término de energía en reposo

4.4. Flujo de calor y estabilidad del sistema

de las moléculas y por lo tanto $\tilde{\rho}_0 \sim n_0 m$. Es importante recordar que esta cantidad depende de la temperatura en el caso relativista de una forma no trivial. La forma explícita de esta dependencia puede consultarse en la Ref. [7].

Regresando a la Ec. (4.53), tenemos que la respuesta del sistema a las fluctuaciones estadísticas está determinada por la solución de la ecuación de cuarto grado

$$-\frac{\kappa T_0}{c^4 \tilde{\rho}_0} s^4 + s^3 + \frac{\kappa q^2}{n_0 C_n \tilde{\rho}_0} \left(1 - \frac{2p_0}{c^2 \tilde{\rho}_0}\right) s^2 + \frac{q^2 p}{\tilde{\rho}_0} \left(1 + \frac{k}{C_n}\right) s + \frac{\kappa p q^4}{n_0 C_n \tilde{\rho}_0} = 0 \quad (4.21)$$

Para obtener una buena aproximación a las raíces de la Ec. (4.21) se puede seguir el método descrito en la Ref. [10]. Es fácil ver que, siendo el término cuártico de orden c^{-4} , en principio se pueden conservar las raíces conocidas de la ecuación cúbica resultante de ignorar dicho término. Éstas llevan al espectro de Rayleigh-Brillouin no relativista con correcciones de orden c^{-2} en el ancho de los picos y la localización de los mismos. Utilizando la información de estas tres raíces es posible estimar la cuarta como

$$s_4 = \frac{c^4 \tilde{\rho}_0}{\kappa T_0} + q^2 \frac{\kappa}{n_0 C_n \tilde{\rho}_0} \left(1 - \frac{2p_0}{c^2 \tilde{\rho}_0}\right) \quad (4.22)$$

donde el primer término claramente domina y produce una raíz positiva y real. Ésta cuarta solución predomina sobre las oscilaciones amortiguadas y lleva a un crecimiento exponencial de las fluctuaciones. Este efecto fue observado inicialmente por Hiscock y Lindblom quienes concluyeron que, al ser patológico el comportamiento de las fluctuaciones y presentar tiempos característicos extremadamente pequeños para su crecimiento ($\sim 10^{-33} s$), las teorías de primer orden debían ser descartadas. Sin embargo, como se mostró en la Ref. [6] y tal como se ilustrará en la siguiente sección, *no es el orden en los gradientes de las ecuaciones constitutivas el problema en estas teorías* sino el acoplamiento del flujo de calor con la aceleración hidrodinámica. Al expresarse el flujo de calor en términos de gradientes espaciales la hipótesis de regresión de fluctuaciones de Onsager se satisface cabalmente.

4.4. Flujo de calor y estabilidad del sistema

4.4.1. Elementos de teoría cinética relativista

En la sección anterior se mostró como, usando una ecuación constitutiva que acopla el flujo de calor con la aceleración hidrodinámica, el sistema de ecuaciones para el fluido relativista lleva a un crecimiento exponencial de fluctuaciones con tiempos característicos muy pequeños. Dicha ecuación se propone desde la fenomenología relativista donde el procedimiento para establecerla se basa en sugerir una relación entre flujos y fuerzas termodinámicas que no contradiga la extensión a procesos irreversibles de la segunda ley [4]. Sin embargo, existe un procedimiento analítico para obtener estas relaciones desde el punto de vista microscópico. La teoría cinética permite establecer explícitamente las ecuaciones constitutivas e incluso arroja expresiones analíticas para los coeficientes de transporte involucrados en las mismas.

Por lo anterior, en esta sección se mostrarán algunos elementos fundamentales de la teoría cinética relativista y los resultados relevantes para el problema de estabilidad descrito en la sección 3. Los detalles de estos cálculos pueden ser consultados en las referencias que se incluirán oportunamente. La teoría cinética de los gases describe la termodinámica de un sistema de partículas independientes fuera de equilibrio a partir de promediar las propiedades dinámicas a nivel molecular. Este formalismo ha tenido gran éxito en el caso no relativista y tiene actualmente un grado de avance considerable en el caso relativista. Para el caso de sistemas con una temperatura elevada, tal que la energía térmica sea comparable con la energía en reposo de las moléculas, la dinámica a nivel microscópico debe ser compatible con la relatividad especial en el caso de gases diluidos. Esto significa que, para valores cercanos a la unidad del parámetro relativista

$$z \equiv kT/mc^2 \quad (4.23)$$

consideraremos un espacio plano caracterizado por una métrica de Minkowski

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (4.24)$$

donde la posición y velocidad de cada molécula quedan determinadas por

$$x^\mu = [\vec{x}, ct] \quad v^\mu = \gamma(w) [\vec{w}, c] \quad (4.25)$$

En las expresiones anteriores, la primera entrada corresponde con las componentes espaciales y el factor de Lorentz es

$$\gamma(w) = (1 - w^2/c^2)^{-1/2} \quad (4.26)$$

La función de distribución corresponde, de igual manera que en el caso no relativista, a la densidad de partículas en el espacio fase de forma tal que $f(x^\nu, v^\nu) d^3x d^3v$ expresa el número de partículas en cada celda de dicho espacio. La evolución de la función de distribución está dada entonces por la ecuación de Boltzmann relativista que, en ausencia de fuerzas externas, corresponde a [11]

$$v^\alpha f_{,\alpha} = J(ff') \quad (4.27)$$

donde el lado derecho representa las variaciones en el número de ocupación de cada celda del espacio fase debido a colisiones. El operador J contiene una integral que involucra la función de distribución antes y después de las colisiones individuales, así como una probabilidad de transición de un estado microscópico a otro. Esto implica que la Ec. (4.27) es una ecuación integrodiferencial con todas las complicaciones que ello acarrea. Existen varios métodos de solución aproximados, el estándar siendo el de Hilbert [12]. Sin embargo, para obtener la relación entre flujos y fuerzas no es necesario tomar en cuenta los detalles de las colisiones y basta con sustituir el lado derecho por un término de relajación tipo BGK [12, 11]

$$J(ff') \sim -\frac{f - f^{(0)}}{\tau} \quad (4.28)$$

donde $f^{(0)}$ es la solución de equilibrio local y τ un tiempo de relajación característico, del orden del tiempo colisional. La hipótesis de equilibrio local, que se introduce en los fundamentos de

4.4. Flujo de calor y estabilidad del sistema

la termodinámica irreversible, permite establecer variables de estado en la cercanía de un punto. En el caso de la teoría cinética dichas cantidades se asocian con promedios sobre una función de distribución que corresponda al equilibrio local, en este caso $f^{(0)}$.

Las ecuaciones de balance en este contexto se obtienen multiplicando la Ec. (4.27) por invariantes colisionales e integrando sobre el elemento de volumen en el espacio de velocidades, que para el caso relativista está dado por

$$d^*v = \frac{d^3v}{\gamma(w)} \quad (4.29)$$

A partir de este procedimiento se encuentran las Ecs. (4.3) y (4.4) donde el flujo de partículas y el tensor de momento-energía están ahora dados en términos de promedios como

$$N^\nu = \int v^\nu f d^*v \quad (4.30)$$

$$T^{\mu\nu} = m \int v^\mu v^\nu f d^*v \quad (4.31)$$

de donde, como se muestra a detalle en la Ref. [7], se desprenden las siguientes expresiones para las variables de estado

$$n = \int f^{(0)} \gamma(w) dv^*, \quad \text{densidad numérica} \quad (4.32)$$

$$nu^\ell = \int f^{(0)} \gamma(w) w^\ell dv^*, \quad \text{velocidad hidrodinámica} \quad (4.33)$$

$$n\varepsilon = mc \int f^{(0)} \gamma(k) K^4 dK^* \quad \text{energía interna por partícula} \quad (4.34)$$

En estas ecuaciones K^μ es la velocidad peculiar (o caótica), es decir la velocidad medida en un sistema comóvil con cada elemento de volumen cuya velocidad hidrodinámica es u^μ . Ésta cantidad se define a través de la ley de transformación

$$v^\nu = \mathcal{L}_\mu^\nu K^\mu \quad (4.35)$$

donde \mathcal{L}_μ^ν es una transformación de Lorentz entre el sistema laboratorio y dicho sistema comóvil en el cual $u^\nu = [\vec{0}, c]$ [8]. Nótese que las cantidades de las Ecs. (7.17-4.34) están ponderadas por la solución de equilibrio local de la ecuación de Boltzmann que en el caso relativista es la función de Jüttner, dada por

$$f^{(0)} = \frac{n}{4\pi c^3 z K_2\left(\frac{1}{z}\right)} e^{-\frac{u^\beta v_\beta}{zc^2}} \quad (4.36)$$

ó, utilizando la definición de K^μ

$$f^{(0)} = \frac{n}{4\pi c^3 z K_2\left(\frac{1}{z}\right)} e^{-\frac{\gamma(k)}{z}} \quad (4.37)$$

En las Ecs. (4.36-4.37) $K_n \left(\frac{1}{z}\right)$ es la función de Bessel modificada de segundo tipo de orden n .

La metodología anteriormente expuesta lleva también a las expresiones para los flujos disipativos:

$$q^\nu = mc^2 h_\beta^\nu \int \gamma_k K^\beta f^{(0)} \phi dK^* \quad (4.38)$$

$$\pi^{\mu\nu} = mh_\alpha^\mu h_\beta^\nu \int K^\alpha K^\beta f^{(0)} \phi dK^* \quad (4.39)$$

donde se ha introducido la hipótesis de Chapman-Enskog para proponer la función de distribución como

$$f = f^{(0)} (1 + \phi) \quad (4.40)$$

El segundo término en la Ec. (4.40) es la solución a primer orden en los gradientes de la ecuación de Boltzmann linealizada. Es usual introducir un parámetro de orden, llamado el parámetro de Knudsen, que es utilizado para linealizar dicha ecuación tomando en cuenta que la solución de equilibrio corresponde al orden cero en dicho parámetro mientras que $f^{(0)}\phi$ es la solución a primer orden. La magnitud de este parámetro se establece como la razón entre magnitud de los gradientes presentes en el sistema y la longitud característica del mismo. Es por ello que se le llama a $f^{(0)}\phi$ la distribución a primer orden en los gradientes y a la teoría se le asocia el término “de primer orden”.

De esta forma, para obtener la estructura de las ecuaciones constitutivas a primer orden en los gradientes, basta con resolver la ecuación de Boltzmann linealizada, dentro de la aproximación dada por la Ec. (4.28). Siguiendo estas ideas se obtiene ϕ y con ella se pueden expresar las integrales en las Ecs. (4.38-4.39) en términos de los gradientes de las funciones termodinámicas locales. Este método puede ser consultado en las Refs. [6] y [13], aquí sólo se dará un argumento sencillo y directo para llegar al punto medular de esta sección, que es justamente la expresión del flujo de calor que arroja la teoría cinética a primer orden.

La versión linealizada de la Ec. (4.27) con la aproximación dada por la Ec. (4.28) está dada por

$$f^{(0)}\phi = -\tau v^\alpha \left\{ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T_{,\alpha} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} n_{,\alpha} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial U^\mu} U_{,\alpha}^\mu \right\} \quad (4.41)$$

donde se ha utilizado que la función de distribución depende del espacio y el tiempo únicamente a través de las variables de estado. Nótese que en la expresión anterior se encuentran tanto los gradientes espaciales como las derivadas temporales. Siguiendo el método de Hilbert, las derivadas temporales deben ser expresadas en términos de los gradientes espaciales utilizando las ecuaciones de transporte del orden anterior [12]. Esto corresponde a introducir las ecuaciones de Euler relativistas que están dadas por

$$(nu^\mu)_{;\mu} = 0 \quad (4.42)$$

$$\left(\frac{n\varepsilon}{c^2} u^\alpha u_\beta + ph_\beta^\alpha \right)_{;\alpha} = 0 \quad (4.43)$$

Es importante resaltar que, al llevar a cabo este paso *la aceleración hidrodinámica es eliminada de la solución a primer orden*. Ciertamente, dicha cantidad no corresponde con una fuerza termodinámica sino que es la derivada temporal de una variable de estado y por lo tanto debe ser manejada de la misma forma que las derivadas temporales de la temperatura y la densidad de partículas.

4.4. Flujo de calor y estabilidad del sistema

Por lo mencionado anteriormente, es claro que al introducir la Ec. (4.41) en la Ec. (4.38) y utilizar las Ecs. (4.42) y (4.43) se obtiene

$$q^\mu = -h_\nu^\mu \left(L_{TT} \frac{T^{\nu}}{T_0} + L_{nT} \frac{n^{\nu}}{n_0} \right) \quad (4.44)$$

donde la ausencia del gradiente de velocidad proviene del principio de Curie, el cual afirma que el acoplamiento se dá únicamente entre flujos y fuerzas del mismo rango tensorial. Los coeficientes L_{TT} y L_{nT} han sido calculados explícitamente en la Ref. [6] y corresponden con las expresiones

$$L_{TT} = \frac{nk^2T^2\tau}{m} \left\{ \left(\frac{1}{z} - \left(4z + \frac{K_1(\frac{1}{z})}{K_2(\frac{1}{z})} \right)^{-1} \right) \left(\frac{1}{z} + 5\mathcal{G} \left(\frac{1}{z} \right) \right) - \left(1 + \frac{K_1(\frac{1}{z})}{2zK_2(\frac{1}{z})} + \frac{\mathcal{G}(\frac{1}{z})}{2z} \right) \frac{\mathcal{G}(\frac{1}{z})}{z} \right\} \quad (4.45)$$

$$L_{nT} = \frac{nk^2T^2\tau}{m} \left\{ \frac{\mathcal{G}(\frac{1}{z})}{z} - \left(4z + \frac{K_1(\frac{1}{z})}{K_2(\frac{1}{z})} \right)^{-1} \left(\frac{1}{z} + 5\mathcal{G} \left(\frac{1}{z} \right) \right) \right\}, \quad (4.46)$$

Es interesante observar que cuando z tiende a cero (límite de bajas temperaturas), L_{TT} se acerca a $\frac{5}{2} \frac{nk^2T}{m} \tau$, que es la conductividad térmica en el caso no relativista para la aproximación de BGK, mientras que L_{nT} tiende a cero .

La Ec. (4.44), obtenida de forma analítica a partir de la teoría cinética, expresa el flujo de calor acoplado con las fuerzas termodinámicas dadas por los gradientes de las variables de estado, de forma consistente con la termodinámica irreversible lineal. En la siguiente subsección se analizará el efecto de introducir dicha ecuación en lugar de la Ec. (4.12) en el sistema de ecuaciones de balance.

4.4.2. Análisis de la ecuación de dispersión

Veamos ahora cómo modifica la ecuación constitutiva (4.44) a la relación de dispersión encontrada en la sección anterior. La ecuación de continuidad, Eq. (4.16), no contiene efectos disipativos por lo cual no se ve alterada. Sin embargo, las ecuaciones de balance de ímpetu y energía tienen ahora la siguiente estructura:

$$\left(\frac{n\varepsilon_0}{c^2} + \frac{p_0}{c^2} \right) \delta\dot{\theta} + \frac{p_0}{T_0} (\delta T^{\nu\mu})_{;\mu} + \frac{p_0}{n_0} (\delta n^{\nu\mu})_{;\mu} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{L_{TT}}{T_0} \delta\dot{T}_{;\mu}^{\mu} + \frac{L_{nT}}{n_0} \delta\dot{n}_{;\mu}^{\mu} \right) = 0 \quad (4.47)$$

$$nC_n \delta\dot{T} + p_0 \delta\theta - \left(\frac{L_{TT}}{T_0} \delta T_{;\nu}^{\nu} + \frac{L_{nT}}{n_0} \delta\dot{n}_{;\mu}^{\mu} \right) = 0 \quad (4.48)$$

Llevando a cabo el mismo procedimiento que en la sección anterior se llega a la ecuación de dispersión

$$\det \begin{pmatrix} s\tilde{\rho}_0 + q^2 \left(\frac{p_0}{s} - \frac{L_{nT}}{c^2} \right) & \frac{q^2}{T_0} \left(\frac{L_{TT}}{c^2} s - p_0 \right) \\ (p_0 - L_{nT}q^2) & \left(n_0 C_n s + \frac{L_{TT}}{T_0} q^2 \right) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.49)$$

que en este caso es una ecuación cúbica en s dada por

$$s^3 + \frac{q^2 L_{TT}}{TC_n n_0 \tilde{\rho}_0} \left[\tilde{\rho}_0 \left(1 - \frac{p_0}{\tilde{\rho}_0 c^2} \right) + \frac{L_{nT}}{c^2} (q^2 - n_0 C_n) \right] s^2 + \frac{q^2 p}{\tilde{\rho}_0} \left[1 + \frac{k}{C_n} - \frac{L_{nT} q^2}{c^2} \left(\frac{L_{TT}}{p c^2} - 1 \right) \right] s + \frac{L_{TT} k}{C_n \tilde{\rho}_0} q^4 = 0 \quad (4.50)$$

Las raíces de esta última expresión pueden ser obtenidas utilizando el método aproximado descrito en la Ref. [10], como en el caso anterior. Para esta ecuación se puede ver que existen dos soluciones imaginarias y una real, lo cual lleva a un comportamiento cualitativamente equivalente al del caso no-relativista. Se obtiene entonces un espectro tipo Rayleigh-Brillouin con modificaciones en los parámetros que lo caracterizan. Estas correcciones, así como los detalles de este cálculo se pueden encontrar en la Ref. [10]. De esta forma se concluye que el comportamiento de las fluctuaciones en ambos casos, utilizando la ecuación constitutiva de Eckart y la obtenida utilizando la teoría cinética, son radicalmente diferentes. La introducción de un término de aceleración en el flujo de calor lleva a un comportamiento patológico dado por un crecimiento exponencial de las fluctuaciones mientras que el acoplamiento de q^ν con gradientes de variables termodinámicas predice un comportamiento cualitativamente similar al caso no relativista. El grado del polinomio que se obtiene de la ecuación de dispersión es lo que determina que en el primer caso se pierda el espectro de dispersión mientras que en el segundo se obtengan correcciones en la localización y anchos de los picos y se recupere el límite no relativista. Esta diferencia puede ser rastreada directamente al término de aceleración, el cual aumenta el grado en s de la transformada de Fourier-Laplace del balance de ímpetu para fluctuaciones en el modo longitudinal de la velocidad.

4.5. Consideraciones finales

En esta contribución se ha presentado una alternativa para preservar la estabilidad de un sistema relativista disipativo y monocomponente sustentada microscópicamente. Es importante hacer notar que existen formalismos propuestos por otros autores que el lector deberá contrastar con respecto al enfoque aquí presentado. El más socorrido de ellos corresponde a la introducción de la ecuación constitutiva de Maxwell y Cattaneo para relacionar al flujo de calor con las fuerzas termodinámicas. En su versión más simple, dicha ecuación corresponde a la expresión

$$\tau_r \dot{\vec{q}} + \vec{q} = -\kappa h_\nu^\alpha (T^\nu + \frac{T}{c^2} a^\nu) \quad (4.51)$$

donde τ_r corresponde a un tiempo de relajación introducido en las llamadas teorías extendidas de la termodinámica irreversible. Estos tiempos necesariamente son del orden de los tiempos colisionales. El efecto que el primer término del lado izquierdo de la Ec. (4.51) genera sobre la inestabilidad de Hiscock y Lindblom es aparentemente satisfactorio. El resultado del cálculo correspondiente permite establecer la ecuación de dispersión [14]:

$$\left(\tau_r - \frac{\kappa T_0}{c^4 \tilde{\rho}_0} \right) s^4 + s^3 + q^2 \frac{\kappa}{n_0 C_n \tilde{\rho}_0} \left(1 - \frac{2p_0}{c^2 \tilde{\rho}_0} \right) s^2 + \frac{q^2 p}{\tilde{\rho}_0} \left(1 + \frac{k}{C_n} \right) s + \frac{\kappa p}{n_0 C_n \tilde{\rho}_0} q^4 = 0 \quad (4.52)$$

Dado que el tiempo de relajación excede por mucho el valor de $-\frac{\kappa T_0}{c^4}$ para un fluido en condiciones normales de presión y temperatura, la inestabilidad desaparece.

Existe un argumento elemental para cuestionar ampliamente la introducción de la ecuación de Maxwell y Cattaneo como medio para solucionar el problema de la inestabilidad genérica que se presenta en los fluidos relativistas descritos con la fenomenología de Eckart. Es bien sabido que la introducción de tiempos de relajación es completamente innecesaria en el estudio de sistemas descritos apropiadamente por las ecuaciones de Navier-Stokes-Fourier. Esto implica que efectos tales como el espectro Rayleigh-Brillouin deben ser perfectamente reproducibles aun en el caso en el cual $\tau_r = 0$. La razón por la cual sistemas no relativistas tales como el agua a temperatura ambiente son estables no es la introducción de tiempos de relajación que atenúen el efecto del coeficiente $-\frac{\kappa T_0}{c^4}$ en la ecuación de cuarto grado (22). Es perfectamente conocido que la dinámica de las fluctuaciones en este tipo de fluidos es bien descrita por una ecuación de dispersión cúbica [2].

Es interesante observar que la inestabilidad genérica también desaparece si se hace uso de la ecuación constitutiva

$$\tau_r \dot{\vec{q}} + \vec{q} = -h_\nu^\mu \left(L_{TT} \frac{T^{\nu}}{T_0} + L_{nT} \frac{n^{\nu}}{n_0} \right) \quad (4.53)$$

la cual lleva a la ecuación de dispersión:

$$\begin{aligned} \tau_r s^4 + s^3 + \frac{q^2 L_{TT}}{T C_n n_0 \tilde{\rho}_0} \left[\tilde{\rho}_0 \left(1 - \frac{p_0}{\tilde{\rho}_0 c^2} \right) + \frac{L_{nT}}{c^2} (q^2 - n_0 C_n) \right] s^2 \\ + \frac{q^2 p}{\tilde{\rho}_0} \left[1 + \frac{k}{C_n} - \frac{L_{nT} q^2}{c^2} \left(\frac{L_{TT}}{p c^2} - 1 \right) \right] s + \frac{L_{TT} k}{C_n \tilde{\rho}_0} q^4 = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

de lo cual se desprende que aún en los casos en los cuales fuera necesaria la introducción de una ecuación de relajación para la descripción de un fluido (por ejemplo en los casos de viscoelasticidad), el acoplamiento calor-aceleración es completamente prescindible en el estudio de la estabilidad de las fluctuaciones hidrodinámicas del fluido. El formalismo relativista a primer orden en los gradientes ha sido poco apreciado históricamente y sus posibles aplicaciones aún están por explorarse.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer al Dr. García-Colín por sus valiosos comentarios y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo a través del proyecto No. 167563.

Bibliografía

- [1] García-Colín L. S., & Goldstein P., La Física de los Procesos Irreversibles, El Colegio Nacional, México (2003).

-
- [2] Berne B. J., & Pecora R., *Dynamic Light Scattering: With Applications to Chemistry, Biology, and Physics*, Mineola USA (2000).
- [3] Hiscock, W. A. & Lindblom, L., Generic instabilities in first order dissipative relativistic fluid theories, *Phys. Rev. D* **31**, 725 (1985).
- [4] Eckart, C., The Thermodynamics of Irreversible Processes III: Relativistic Theory of the Simple Fluid **58**, 919 (1940).
- [5] Ver por ejemplo: Geroch R. & Linblom L. Dissipative relativistic fluid theories of divergence type, *Phys. Rev. D* **41**, 1855 (1990); Geroch R., Relativistic Theories of Dissipative Fluids, *J. Math. Phys.* **36**, 4226 (1995).
- [6] Sandoval-Villalbaz, A., García-Perciante, A. L. & García-Colín, L. S., Relativistic transport theory for simple fluids to first order in the gradients, *Physica A* **388**, 3765 (2009).
- [7] García-Perciante, A. L., Sandoval-Villalbaz, A., & García-Colín, L. S., On the microscopic nature of dissipative effects in special relativistic kinetic theory, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, **37**, 43 (2012).
- [8] García-Perciante, A. L., Heat and chaotic velocity in special relativity, *AIP Conf. Proc.* **1332**, 216 (2011).
- [9] García-Perciante, A. L., García-Colín, L. S., & Sandoval-Villalbaz, A., On the nature of the so-called generic instabilities in dissipative relativistic hydrodynamics, *General Relativity and Gravitation* **41**, 1645 (2009).
- [10] García-Perciante, A. L., García-Colín, L. S., & Sandoval-Villalbaz, A., Rayleigh-Brillouin spectrum in special relativistic hydrodynamics, *Phys. Rev. E* **79**, 066310 (2009).
- [11] Cercignani, C. & Medeiros Kremer, G.: *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*, Cambridge University Press 3rd Ed., (1991) UK.
- [12] Chapman S. and Cowling T. G. 1970 Third Edition *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases* (Cambridge: Univ. Press)
- [13] García-Perciante A. L., Méndez A. R., Heat conduction in relativistic neutral gases revisited, *Gen. Rel. Grav.* **43**, 2257 (2011).
- [14] Ver por ejemplo: D. Brun-Battistini, A. Sandoval-Villalbaz, A. L. García-Perciante, Maxwell-Cattaneo's equation and the stability of fluctuations in the relativistic fluid, arXiv:1104.0858 (2011).

Velocidad y distribución del CNB

Jorge Alfaro y Pablo González

Facultad de Física, Pontificia Universidad Católica de Chile, Casilla 306, Santiago 22, Chile.

jalfaro@uc.cl, pegonza2@uc.cl

Resumen

Los neutrinos primordiales del fondo de Radiación cósmica (**CNB**) se desacoplaron cuando el universo era muy joven, mucho antes que el fondo de fotones (**CMB**). Son muy complicados de detectar hoy en día, pero podrían llegar a tener una gran relevancia para el estudio del Big-Bang por contener información a épocas muy tempranas. A la espera de la posibilidad de detectarlos algún día, resulta conveniente estudiar su comportamiento y ver si difiere de alguna forma con el de los fotones. En este trabajo veremos que, por un lado, una violación a Lorentz no produce efectos relevantes. Pero por otro lado, a pesar de tener una masa muy pequeña, veremos que ésta afecta fuertemente a cómo se vería si fuera una partícula sin masa como los fotones. Por ejemplo, su velocidad con respecto al sistema de referencia comóvil a la expansión del universo es $1065 \left[\frac{km}{s} \right]$, mucho menos que la velocidad de la luz. Esto implicará una distribución mucho más compleja debido al movimiento planetario. Es por esto que trataremos de obtener una expresión para la corrección del momento dipolar. Este trabajo fue desarrollado en [1].

5.1. Introducción

Desde el comienzo, los fotones y todas las partículas estaban acopladas formando un plasma que fue evolucionando bajo la influencia de la expansión del Universo. Aun muy temprano en la vida del Universo, los neutrinos se desacoplaron de este plasma. Desde ese momento, empezaron a evolucionar de forma independiente del resto. Este fenómeno ocurrió también en los fotones en una época más tardía. Estos últimos tienen una importancia enorme para poder determinar los parámetros cosmológicos al estudiar la forma del espectro de potencias del **CMB**, ya que estos fotones nos entregan una representación muy precisa de las fluctuaciones de la materia al momento de desacoplarse [2]. Los neutrinos podrían entregar información del mismo tipo, pero de una época mucho más temprana, lo que puede decirnos algo sobre lo ocurrido en épocas inflacionarias.

En principio uno podría pensar que los neutrinos tendrían un espectro similar al de los fotones, pero ya desde hace algún tiempo se sabe que los neutrinos poseen masa. A pesar de ser muy pequeñas, veremos que tendrá un efecto muy importante en su comportamiento a medida que evoluciona el universo. En particular, estudiaremos la velocidad que tendrán desde el momento de su desacoplo hasta el día de hoy.

Como ya dijimos antes, el fondo de radiación cósmica es muy relevante para determinar los parámetros cosmológicos y es una de las grandes pruebas del Big-Bang [3]. Para poder estudiarlo es de vital importancia conocer su distribución. Es por esto que el otro fenómeno que estudiaremos será la distribución de los neutrinos primordiales, en particular los efectos observacionales que tenga la velocidad peculiar de la Tierra, llamado momento dipolar, ya que es vital para poder optimizar su detección.

Finalmente, incluiremos una pequeña Violación a la Invarianza de Lorentz (LIV), representada por una modificación a la relación de dispersión de energía dada por [4]-[5]:

$$E^2 = v_{max}^2 p^2 + m^2 c^4$$

Donde $v_{max} = c(1 - \alpha)$ es la velocidad máxima de la partícula. Esto quiere decir que cada tipo de partícula tendrá su propia velocidad máxima. Ciertas cotas nos dicen que $\alpha \sim 10^{-22}$ para los neutrinos. La motivación para usar una LIV viene de la posibilidad de que, en fenómenos de altas energías como cerca del Big-Bang, efectos de Gravedad Cuántica traigan violaciones de este tipo [4]-[8].

Hay que mencionar que una LIV podría tanto traer problemas fundamentales como resolver otros. Por ejemplo, un problema sería el surgimiento de un sistema de referencia privilegiado, pero el sistema de referencia isotrópico a la expansión del universo es un candidato natural. Y un fenómeno que podría solucionar es la detección de rayos cósmicos altamente energéticos, aunque las cotas para este fenómeno ya son muy bajas [9]-[10].

5.2. Velocidad de los neutrinos primordiales

Inicialmente los neutrinos se encontraban en equilibrio térmico con el resto de la materia. Para que esto suceda, se debe cumplir que $\Gamma_i \gg H$, donde Γ_i es la tasa de interacciones de la especie i , $H \propto T^2$ es la constante de Hubble y T la temperatura. Mientras las especies de neutrinos se mantengan en equilibrio, su distribución, y la de cualquier especie fermiónica, estará dada por la estadística de Fermi-Dirac:

$$f_{eq}(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1}$$

A medida que sucede la expansión, la temperatura va disminuyendo hasta un punto donde $\Gamma_\nu \lesssim H$ mientras que $\Gamma_{i \neq \nu} \gg H$. Esto quiere decir que los neutrinos dejan de estar en equilibrio y se desacoplan del resto de la materia. Llamaremos $T_{\nu,D}$ a la temperatura de desacople de los neutrinos que se obtiene al imponer $\Gamma_\nu \simeq H(T)$. Para ver que sucede con su distribución haremos el siguiente análisis. A un tiempo t_0 , un observador ve en cierta dirección una cantidad $dN = f d^3r d^3p$ de neutrinos en un volumen propio d^3r y con momentum entre \vec{p} y $\vec{p} + d\vec{p}$. Pasado un tiempo dt , los neutrinos no han interactuado por lo que dN permanece constante, pero el volumen propio en que se encuentran ha aumentado en un factor $\left(\frac{R(t_0+dt)}{R(t_0)}\right)^3$ y el momentum ha disminuido en $\frac{R(t_0)}{R(t_0+dt)}$. Esto significa que $f(E, T_\nu)$ se conserva en el tiempo. O sea, para $t > t_D$ (o $T_\nu < T_{\nu,D}$) con t_D el momento en que se produce el Desacople, la función de distribución está dada por [11]:

$$f[E(p(t)), T_\nu(t)] = f_{eq}[E(p_D), T_{\nu,D}] = f_{eq}\left[E\left(p(t)\frac{R(t)}{R_D}\right), T_{\nu,D}\right] \quad (5.1)$$

Donde el subíndice D se refiere a la época del desacople. Además sabemos que el número de neutrinos, la energía total y la energía por neutrino están dadas por:

$$N_\nu = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \int f(p, T_\nu) d^3p \quad (5.2)$$

$$E_\nu = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \int E(p) f(p, T_\nu) d^3p \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_\nu = \frac{E_\nu}{N_\nu} \quad (5.4)$$

Donde:

$$E^2(p) = v_{max}^2 p^2 + m^2 c^4$$

Ahora se puede determinar la Función Distribución que seguirán después de desacoplarse. La energía de los neutrinos se puede expresar como $E(t) = v_{max,\nu} p(t)$ (Usamos una expansión con

5.2. Velocidad de los neutrinos primordiales

cero orden en la masa ya que f depende exponencialmente de E lo que reduce aún más su efecto) y como $p_D = p(t) \frac{R(t)}{R_D}$, obtenemos al usar (5.1):

$$f[p, T_\nu] = \frac{1}{e^{\frac{v_{max,\nu} p}{k_B T_\nu}} + 1} \quad (5.5)$$

Con $T_\nu = T_{\nu,D} \frac{R_D}{R(t)}$ y $\mu_\nu = 0$ por la baja interacción que tienen con la materia. Esto significa que la distribución de los neutrinos, que se desacoplan mientras son relativistas, es de Fermi con temperatura T_ν , o sea $RT_\nu = cte$. Evaluando en (5.2) y (5.3):

$$N_\nu = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{1}{e^{\frac{v_{max,\nu} p}{k_B T_\nu}} + 1} d^3p$$

$$E_\nu = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{E(p)}{e^{\frac{v_{max,\nu} p}{k_B T_\nu}} + 1} d^3p$$

Naturalmente, la expresión de N_ν será igual para cualquier instante de tiempo. Usando el cambio de variable $x = \frac{v_{max,\nu} p}{k_B T_\nu}$, obtenemos:

$$N_\nu = \frac{3gV\zeta(3)(k_B T_\nu)^3}{4\pi^2 \hbar^3 v_{max,\nu}^3} \quad (5.6)$$

Donde $\zeta(3) = 1,2021$ es la función Zeta de Riemann. Podemos ver que, efectivamente, se mantiene constante en el tiempo ya que $V \propto R^3(t)$ y $T_\nu \propto R^{-1}(t)$. Para determinar E_ν , se debe tener una expresión para $E(p)$. En general, esta expresión es nuestra relación de dispersión, pero como la integral se vuelve muy complicada, analizaremos los casos extremos donde los neutrinos siguen siendo relativista y cuando dejan de serlo. Por la simetría esférica, la velocidad es radial, por lo tanto sólo debemos determinar su módulo. El módulo de la velocidad de una partícula está dada por:

$$v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}$$

siendo ε y p la energía y el momentum de una partícula relacionados por nuestra relación de dispersión:

$$\varepsilon^2 = v_{max}^2 p^2 + m^2 c^4$$

Mientras la partícula siga siendo relativista, al desarrollar la derivada hasta segundo orden en la masa ($\varepsilon \gg mc^2$), obtendremos que:

$$v_\nu \simeq v_{max,\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon} \right)^2 \right) \quad (5.7)$$

Donde podemos ver que sólo el orden cero en la masa de ε mantiene el segundo orden en la velocidad. Por lo tanto debemos usar $E(p) = v_{max}p$ al desarrollar E_ν .

Ahora, si la partícula pasa a ser no-relativista, tendremos que la energía y la velocidad de una partícula a segundo orden en el momentum ($pv_{max,\nu} \ll mc^2$) serán:

$$\varepsilon_\nu \simeq mc^2 + \left(\frac{v_{max,\nu}}{c}\right)^2 \frac{p^2}{2m}$$

$$v_\nu = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \simeq \left(\frac{v_{max,\nu}}{c}\right)^2 \frac{p}{m} = v_{max,\nu} \sqrt{2 \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} - 1\right)} \quad (5.8)$$

Donde vemos que, para mantener el orden en el momentum, los cálculos deben ser hasta segundo orden en la expresión de $E(p)$, o sea $E(p) = mc^2 + \left(\frac{v_{max,\nu}}{c}\right)^2 \frac{p^2}{2m}$.

5.2.1. Neutrinos relativistas

Como dijimos, para determinar E_ν en este caso, debemos usar $E(p) = v_{max}p$. Con esto, obtenemos la expresión:

$$E_\nu = \frac{7\pi^2 gV (k_B T_\nu)^4}{240 \hbar^3 v_{max,\nu}^3} \quad (5.9)$$

Usando (B.8) y (5.9) en (5.4) y (5.7), obtenemos:

$$\varepsilon_\nu = \frac{7\pi^4}{180\zeta(3)} k_B T_\nu \quad (5.10)$$

$$v_\nu = v_{max,\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{180\zeta(3)m_\nu c^2}{7\pi^4 k_B T_\nu} \right)^2 \right) \quad (5.11)$$

Si definimos la velocidad relativa entre los neutrinos y los fotones del plasma como $\Delta v = v_\gamma - v_\nu$, nos queda:

$$\Delta v = \Delta v_{max} + \frac{v_{max,\nu}}{2} \left(\frac{180\zeta(3)m_\nu c^2}{7\pi^4 k_B T_\nu} \right)^2$$

Donde $\Delta v_{max} = v_{max,\gamma} - v_{max,\nu} = c\alpha_\nu$ lo que significa que este factor se anula si no existe la violación. Evaluando numéricamente y dejándolo en función de $M_\nu = m_\nu c^2$, $k_B T_\nu$ y α_ν , nos queda:

$$\frac{\Delta v}{c} = \alpha_\nu \left(1 - 5,04 \times 10^{-2} \left(\frac{M_\nu}{k_B T_\nu} \right)^2 \right) + 5,04 \times 10^{-2} \left(\frac{M_\nu}{k_B T_\nu} \right)^2 \quad (5.12)$$

Donde hemos separado la parte dependiente e independiente de la violación de Lorentz impuesta. Naturalmente, para que la aproximación sea válida, se debe cumplir que $k_B T_\nu \gg M_\nu$.

5.2.2. Neutrinos no relativistas

En este caso tenemos que $E(p) = m_\nu c^2 + \frac{(v_{max,\nu})^2}{2m_\nu} \frac{p^2}{c^2}$, por lo tanto, al evaluar en E_ν usando (B.8), obtenemos:

$$E_\nu = N_\nu m_\nu c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_B T_\nu}{m_\nu c^2} \right)^2 \frac{I_4}{I_2} \right) \quad (5.13)$$

Con $I_n = \int_0^\infty \frac{x^n}{e^x + 1} dx = (1 - \frac{1}{2^n}) n! \zeta(n+1)$. Entonces, evaluando en (5.4) y (5.8), se tiene que:

$$\varepsilon_\nu = M_\nu \left(1 + 15 \frac{\zeta(5)}{2\zeta(3)} \left(\frac{k_B T_\nu}{M_\nu} \right)^2 \right) \quad (5.14)$$

$$v_\nu = v_{max,\nu} \sqrt{15 \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} \frac{k_B T_\nu}{M_\nu}} \quad (5.15)$$

Dando una velocidad relativa:

$$\frac{\Delta v}{c} = \alpha_\nu \sqrt{15 \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} \frac{k_B T_\nu}{M_\nu}} + \left(1 - \sqrt{15 \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} \frac{k_B T_\nu}{M_\nu}} \right) \quad (5.16)$$

Donde hemos separado la parte dependiente de la violación de Lorentz de la independiente y $\zeta(5) = 1,0369$. Como la velocidad no puede ser mayor que su velocidad máxima, debemos acotar para que valores de la temperaturas esta aproximación es válida. Se tiene que $v_\nu > v_{max,\nu}$ si $k_B T_\nu > \sqrt{\frac{\zeta(3)}{15\zeta(5)}} M_\nu$. Eso significa que la aproximación es válida si $k_B T_\nu \ll \sqrt{\frac{\zeta(3)}{15\zeta(5)}} M_\nu \sim 0,28 M_\nu$.

5.2.3. Resultados numéricos y análisis

Sabemos que, cuando los neutrinos se desacoplaron del resto del plasma primordial, $k_B T_{\nu,D} \simeq (2-4)$ [MeV] y, actualmente, $k_B T_{\nu,0} = 1,68 \times 10^{-4}$ [eV]. Sumado a esto, por parámetros cosmológicos, sabemos que [12]:

$$\sum_i m_{\nu_i} \leq 0,17[\text{eV}]$$

Que claramente nos dice que eran relativistas en el momento de su desacoplo. Como no existen estimaciones muy precisas sobre la masa de los neutrinos, usaremos $m_\nu \simeq 0,17[\text{eV}]$. De esta forma nos aseguramos que estamos dentro de los límites correctos para encontrar el mayor efecto posible que se podría tener sobre la velocidad de los neutrinos. Considerando todo esto, podemos decir con toda seguridad que los neutrinos primordiales ya no son relativistas en el presente.

Antes de discutir en detalle este resultado, analizaremos el efecto de la LIV. Para esto analizaremos las expresiones de velocidad relativista y no relativista. Si observamos estas expresiones, podemos ver que, básicamente, ambas son proporcionales a $v_{max,\nu}$. Esto significa que la diferencia porcentual entre el caso con y sin LIV es siempre:

$$\frac{v_\nu(0) - v_\nu(\alpha_\nu)}{v_\nu(0)} 100\% = \alpha_\nu 100\% = 1 \times 10^{-20}\%$$

Por lo tanto, es imposible que este LIV tenga un efecto importante en los neutrinos. Debido a esto, continuaremos nuestros cálculos usando $\alpha = 0$. Sin embargo, es posible que otro tipo de LIV que altere la relación de dispersión de energías de otra forma pueda tener un efecto relevante.

Anteriormente mencionamos que nuestra aproximación no relativista sólo es válida si $\frac{k_B T_\nu}{M_\nu} \ll 0,28$. En el presente tenemos que $\frac{k_B T_\nu}{M_\nu} \simeq 10^{-3}$ cumpliéndose la aproximación no relativista. Debemos recordar que usamos una cota alta para la masa del neutrino, así que es caso de que la masa sea 100 veces menor ($\sim 2 \times 10^{-3} [\text{eV}]$), el límite no es respetado. Sin embargo, tampoco corresponde al límite ultra relativista, más bien corresponde a un caso intermedio. Para mantenerse relativista hasta el día de hoy, es necesario tener una masa al menos 10000 veces menor ($\sim 2 \times 10^{-5} [\text{eV}]$).

En la Figura 5.3 se representa gráficamente la evolución de la velocidad de los neutrinos por la expansión del Universo. Se definen las variables adimensionales $z = \frac{M_\nu}{k_B T_\nu}$ e $y = \frac{v_\nu}{c}$, tal que al movernos hacia mayores valores de z nos movemos más hacia adelante en el tiempo para una masa dada de los neutrinos. Claramente, vemos que los neutrinos sufren una rápida desaceleración desde la época del desacoplo, para luego sufrir una desaceleración cada vez menor, aproximándose a una velocidad cero.

Todas las estimaciones conocidas de la masa de los neutrinos indican que estamos en una zona dominada por la aproximación No Relativista. Las estimaciones más pequeñas están entre 10^{-4} y $10^{-3} [\text{eV}]$. Recordando que nuestro límite superior es $0,17 [\text{eV}]$, veremos que en el presente nos encontramos en la región $0,6 < z < 1012$, el cuál es un rango muy amplio. Evaluando numéricamente en (5.15), obtenemos $v_\nu = 3,55 \times 10^{-3} c = 1065 [\frac{km}{s}]$, con una masa de $0,17 [\text{eV}]$. Esta velocidad será mayor si usamos masas más pequeñas para el neutrino.

Hasta ahora, hemos asumido que los neutrinos no son afectados por el potencial galáctico, o sea son partículas totalmente libres y no son reliquias de la Vía Láctea [13]-[14]. Para verificar este punto, debemos considerar la relación entre la energía cinética y la potencial de los neutrinos en la Vía Láctea. Esto es:

$$\frac{m_\nu v^2}{2} = \frac{GMm_\nu}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Donde v sería la velocidad límite donde la energía potencial es comparable a la energía cinética. Evaluando en $M \simeq 2 \times 10^{42}$ [kg] and $R \simeq 4,7 \times 10^{20}$ [m], la masa y el radio de la Vía Láctea respectivamente, obtenemos $v \simeq 754 \left[\frac{km}{s} \right]$. Como a lo menos $v_\nu \gtrsim 1000 \left[\frac{km}{s} \right]$, nuestra suposición es aceptable al menos hasta el día de hoy.

5.3. Distribución del CNB

Para determinar la distribución efectiva de los neutrinos (distribucion desde la Tierra), necesitamos usar la ecuación (5.5). Sumado a esto, necesitaremos para los cálculos, la distribución de fotones después de desacoplarse, que es:

$$f(p, T) = \frac{1}{e^{\frac{pc}{kT}} - 1}$$

que corresponde a una distribución de Bose-Einstein ultra-relativista con $RT = cte$ que, actualmente, corresponde a una temperatura de 2,73 [K]. Además, vimos en el capítulo anterior que una violación de Lorentz de la forma:

$$E^2 = v_{max}^2 p^2 + m^2 c^4$$

no diferenciaba, de forma notoria, la energía y la velocidad de los neutrinos primordiales en comparación a la relación de dispersión usual ($v_{max} = c$). Es por esto que las reglas usuales de relatividad especial son válidas como, por ejemplo, las transformadas de Lorentz tanto para las coordenadas espacio-temporales como para las de energía-momentum. Por lo tanto, podemos comparar la distribución entre el sistema inercial de la Tierra y el del sistema comóvil a la expansión del universo de la forma usual. Con esto, es posible demostrar que (Ver Apéndice):

$$f'(p', T') = f(p, T) \tag{5.17}$$

Lo que significa que la función distribución es un invariante bajo Lorentz, lo cual es válido para cualquier tipo de partícula. Ahora analizaremos algunos casos. Primero, el de los fotones del CMB

para guiarnos, ya que su resultado es muy conocido. Luego veremos el caso de los neutrinos que es lo que nos compete en este informe. Para esto, nos será útil la relación:

$$E = \gamma(E' - v_i p' \cos(\theta')) \quad (5.18)$$

Donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v_t}{c})^2}}$ y los términos primados se refieren a la Tierra y los no primados al sistema comóvil a la expansión del universo. θ' es el ángulo que se forma entre la línea de visión y la dirección del movimiento de la Tierra [15]. Usando la expresión (5.18) determinaremos p' como función de p .

5.3.1. Fotones

En el caso de los fotones del CMB, tenemos que $E = cp$, por lo tanto, la expresión (5.18) se reduce a:

$$p = \frac{1 - \frac{v_t}{c} \cos(\theta')}{\sqrt{1 - (\frac{v_t}{c})^2}} p'$$

Reemplazando en (5.17), obtenemos:

$$f'(p', T'_\gamma) = f\left(\frac{1 - \frac{v_t}{c} \cos(\theta')}{\sqrt{1 - (\frac{v_t}{c})^2}} p', T_\gamma\right)$$

Como los fotones, después de desacoplarse siguen una distribución de la forma:

$$f_\gamma = \frac{1}{e^{\frac{pc}{k_B T_\gamma}} - 1}$$

podemos dejar nuestra expresión como:

$$f'(p', T'_\gamma) = f\left(p', T_\gamma \frac{\sqrt{1 - (\frac{v_t}{c})^2}}{1 - \frac{v_t}{c} \cos(\theta')}\right)$$

Por lo tanto, la distribución de los fotones detectada desde la Tierra f' en una dirección específica, será de la misma forma que la detectada en el sistema comóvil al universo, pero con una temperatura distinta dada por:

$$T'_\gamma = T_\gamma \frac{\sqrt{1 - (\frac{v_t}{c})^2}}{1 - \frac{v_t}{c} \cos(\theta')}$$

Si consideramos que $v_t \ll c$, nos queda:

$$T'_\gamma \simeq T_\gamma \left(1 + \frac{v_t}{c} \cos(\theta')\right)$$

$$\frac{\Delta T_\gamma}{T_\gamma} \simeq \frac{v_t}{c} \cos(\theta') \quad (5.19)$$

Donde lo último se conoce como el momento dipolar y es del orden de 10^{-4} .

5.3.2. Neutrinos

En el caso de los neutrinos, tenemos partículas con masa. En la época actual, los neutrinos son No Relativistas, por lo tanto $E = m_\nu c^2 + \frac{p^2}{2m_\nu}$ para ambos sistemas de referencia en estudio. Evaluando en (5.18) y usando la aproximación $v_t \ll c$ dejando hasta segundo orden en p' y v_t , queda:

$$p^2 = p'^2 - 2m_\nu v_t p' \cos(\theta') + m_\nu^2 v_t^2$$

Evaluando en (5.17) se obtiene:

$$f'(p', T'_\nu) = f \left(\sqrt{p'^2 - 2m_\nu v_t p' \cos(\theta') + m_\nu^2 v_t^2}, T_\nu \right) \quad (5.20)$$

A diferencia de los fotones, en este caso resulta imposible obtener una relación entre T'_ν y T_ν , pero sabemos que la distribución está dada por (5.5). Aparentemente, sólo podemos notar los efectos gráficamente. Para facilitar nuestro análisis, será útil definir el número de neutrinos por ángulo sólido de momentum:

$$\frac{dN}{d\Omega'} = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} f'(p', T'_\nu) p'^2 dp$$

Con esto, podemos obtener la función distribución del número de partículas:

$$F'(p', T'_\nu) = \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} f'(p', T'_\nu) p'^2 \quad (5.21)$$

En nuestro caso, F' será:

$$F'(p', T'_\nu) \propto \frac{p'^2}{e^{\frac{\sqrt{p'^2 - 2m_\nu v_t p' \cos(\theta') + m_\nu^2 v_t^2} c}{k_B T_\nu}} + 1}$$

$a(\theta')$	Dirección de Observación
1	A favor del Movimiento Terrestre.
0,5	60° deflectado del Movimiento Terrestre.
0	Perpendicular al Movimiento Terrestre.
-0,5	120° deflectado del Movimiento Terrestre.
-1	En contra del Movimiento Terrestre.

Cuadro 5.1: Direcciones de Observación.

Valores de $a(\theta')$ usados en la Figura 5.4 con su correspondiente dirección de observación.

5.3.3. Análisis

Para nuestro análisis, resulta útil definir las variables adimensionales $x = \frac{p'c}{k_B T_\nu}$, $a(\theta') = \frac{m_\nu v_t c}{k_B T_\nu} \cos(\theta')$ and $b = a(0)$. Con estos parámetros nuestra distribución queda como:

$$F' \propto \frac{x^2}{e^{\sqrt{x^2 - 2ax + b^2}} + 1} \quad (5.22)$$

Considerando una velocidad terrestre de $v_t \simeq 300 \left[\frac{km}{s}\right]$, podemos ver que $b \simeq 1$ para $M_\nu = 0,17$ [eV]. Esto significa que $-1 \leq a(\theta') \leq 1$. Este rango será menor si usamos una masa menor para el neutrino, pero la aproximación No Relativista será menos precisa.

En la Figura 5.4 se muestra F' ; aquí hemos usado un valor de $b \sim 1$ y algunos valores representativos de $a(\theta')$ (Ver Tabla 5.1).

Recordemos que la distribución F' representa la cantidad de partículas que vienen de cierta dirección con cierto momentum. Esto nos muestra la pérdida de homogeneidad y de claridad de la distribución. Vamos a captar muchos más neutrinos si observamos hacia donde se dirige la Tierra, pero la función de distribución se altera mucho más con respecto a la del sistema comóvil. Si nos alejamos de esta dirección, el número de neutrinos detectados disminuye considerablemente, de tal forma que los momentum pequeños son favorecidos.

Se puede demostrar que el máximo de la distribución debe cumplir con la ecuación numérica:

$$\left(2\sqrt{x_{max}^2 - 2ax_{max} + b^2} - x_{max}^2 + ax_{max}\right) e^{\sqrt{x_{max}^2 - 2ax_{max} + b^2}} + 2\sqrt{x_{max}^2 - 2ax_{max} + b^2} = 0 \quad (5.23)$$

Es muy complicado encontrar una expresión general para x_{Max} , pero podemos estudiar los casos extremos $a(\theta) = b$ y $a(\theta) = -b$ donde $b \simeq 1$ para $M_\nu = 0,17$ [eV]. Evaluando en (5.23), obtenemos:

$$x_{max}(a = b) = 2,463$$

$$x_{max}(a = -b) = 2,091$$

Esto significa que la mayoría de los neutrinos tendrán momentum:

$$2,091 \leq \frac{p'c}{k_B T_\nu} \leq 2,463$$

Esta información será útil al momento de construir un detector.

Ahora, si usamos una masa más pequeña, la diferencia entre distintas direcciones en las distribuciones desaparece. En la Figura 5.5 y 5.6 podemos ver la distribución a masas 10 y 100 veces menor respectivamente, donde la aproximación No Relativista aún puede ser válida. Para comparar, la distribución de fotones está en la Figura 5.7 para diferentes ángulos de observación.

Este efecto se debe a que una partícula sin masa siempre irá a la velocidad de la luz, mucho más rápido que la velocidad terrestre, por lo tanto la Tierra puede considerarse prácticamente en reposo con respecto al sistema comóvil. Sin embargo, si esta partícula adquiere masa, ésta será sometida a la desaceleración producida por la expansión del universo (Ver Figura 5.3), haciendo para el caso de los neutrinos, que estos tengan velocidades no mucho mayores a la velocidad de la Tierra v_t . Esto significa que el efecto del movimiento terrestre es muy importante y, a medida que pase el tiempo, este efecto será cada vez mayor hasta el punto que la velocidad de los neutrinos sea mucho menor a v_t . Esto se verá reflejado en un incremento enorme de la distribución en la dirección a favor del movimiento terrestre en comparación a cualquier otra dirección.

Conclusión

Logramos demostrar que la pequeña masa de los neutrinos primordiales trae importantes modificaciones a su velocidad. Sin masa, los neutrinos se mantendrían permanentemente a la velocidad de la luz, c . Sin embargo, al tener masa, su velocidad es afectada por una fuerte desaceleración (Ver Figura 5.3), de tal forma que son No Relativistas en la actualidad. Como hemos desarrollado una expresión para la velocidad con respecto al sistema comóvil a la expansión del universo, es necesario usar la adición de velocidades para determinar la velocidad promedio del neutrino relativa a la Tierra. Gracias a que el LIV estudiado en este informe no produce efectos importantes, podemos usar libremente las transformaciones de Lorentz. La diferencia entre la velocidad con y sin LIV es de $\sim 10^{-20} \%$, el cual es totalmente despreciable.

De la misma forma, la masa de los neutrinos también trae importantes cambios en su distribución. Desafortunadamente, a diferencia de los fotones, no es posible introducir un término similar al momento dipolar ya que la temperatura dependería de p' . O sea, a mayor masa mayor el efecto.

Además, la distribución es fuertemente favorecida en la dirección del movimiento Terrestre, pero si nos alejamos de esta dirección el número de neutrinos se reduce. Este efecto será cada vez mayor, de tal forma que llegará un momento en que poco a poco los neutrinos tendrán velocidades menores a la velocidad de la Tierra, a tal punto que parecerán estar en reposo y sólo recibiremos los neutrinos que choquen con la Tierra a medida que esta última se mueva.

Para terminar, de lo dicho anteriormente, debemos destacar que la existencia de la masa de los neutrinos tiene un efecto en la percepción que tenemos de ellos. Básicamente se observa una distribución en extremo no homogénea, con una dirección favorecida. Esto quiere decir que, para poder detectarlos, se deben enfocar los detectores en esta dirección, que corresponde a la dirección del movimiento de la Tierra. Una forma de liberarse de eso es ubicarse en puntos aproximadamente en reposo como lo son los puntos de Lagrange, como lo hará el satélite **Planck Surveyor** que observará el **CMB** [16]. Sin embargo, por la dificultad que implica el detectar neutrinos, probablemente los detectores deberán instalarse en la superficie terrestre.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer a los editores del libro "100 AÑOS DE TEORÍA CINÉTICA RELATIVISTA", especialmente al Dr. Guillermo Chacón Acosta, por la invitación a participar en esta publicación. El trabajo de J.A. ha sido parcialmente financiado por Fondecyt # 1110378. El trabajo de P.G. ha sido financiado por Beca Doctoral Conicyt # 21080490.

Apéndice

Las reglas de relatividad especial nos dicen que las transformaciones de Lorentz entre dos sistemas de referencia son:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{x}'_{\perp} + \gamma(\vec{x}'_{\parallel} + \vec{v}t') \\ t &= \gamma \left(t' + \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}'}{c^2} \right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{p}'_{\perp} + \gamma \left(\vec{p}'_{\parallel} + \frac{\vec{v}}{c^2} E' \right) \\ E &= \gamma(E' + \vec{v} \cdot \vec{p}')\end{aligned}$$

Donde el sistema de referencia primado se mueve a una velocidad \vec{v} del no primado. Los términos con los subíndices \parallel y \perp corresponden a las componentes vectoriales paralelas y perpendiculares

a la velocidad \vec{v} respectivamente. Como estamos considerando una partícula que se mueve en el universo, nuestros sistemas de referencia primados y no primados serán, respectivamente, el de la Tierra y el sistema comóvil a la expansión del universo, por lo tanto \vec{v} es la velocidad propia del planeta Tierra. Por esto, desde ahora, la llamaremos \vec{v}_t .

Considerando que las partículas se mueven hacia la Tierra a lo largo de la línea de visión (Ver Figura (5.1)), las transformadas de Lorentz pueden escribirse como:

$$x_{\perp,i} = x'_{\perp,i} \quad x_{\parallel} = \gamma(x'_{\parallel} + v_t t') \quad t = \gamma \left(t' + \frac{v_t x'_{\parallel}}{c^2} \right) \quad (5.24)$$

$$p_{\perp,i} = p'_{\perp,i} \quad p_{\parallel} = \gamma \left(p'_{\parallel} - \frac{v_t E'}{c^2} \right) \quad E = \gamma(E' - v_t p'_{\parallel}) \quad (5.25)$$

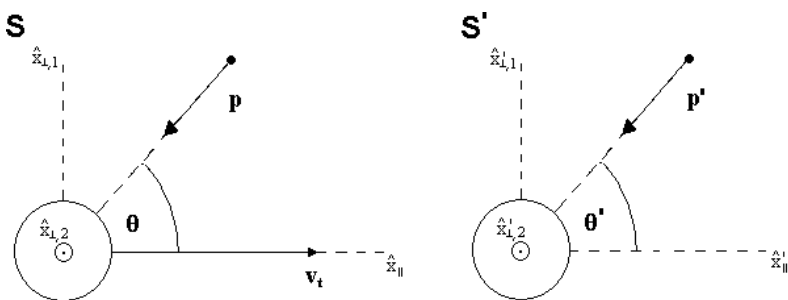


Figura 5.1: Descripción de ambos sistemas de referencia. S : Sistema de referencia comóvil a la expansión del Universo. La Tierra tiene una velocidad v_t y el neutrino tiene momento p . Entre ambos se encuentra el ángulo de visión θ . S' : Sistema de referencia de la Tierra. La Tierra se encuentra en reposo y el neutrino tiene momento p' . Se muestra el ángulo de visión θ' medido desde la Tierra. El sistema de coordenadas de S y S' se relacionan por las transformadas de Lorentz.

Donde $i = 1, 2$ rotulan las dos coordenadas que se pueden obtener de la parte perpendicular a \vec{v}_t . Será útil dejar las transformadas en forma diferencial considerando una medición instantánea desde la Tierra, o sea a $t' = cte$ o $dt' = 0$, resultando:

$$dx_{\perp,i} = dx'_{\perp,i} \quad dx_{\parallel} = \gamma dx'_{\parallel} \quad dt = \gamma \frac{v_t dx'_{\parallel}}{c^2} \quad (5.26)$$

$$dp_{\perp,i} = dp'_{\perp,i} \quad dp_{\parallel} = \gamma \left(dp'_{\parallel} - \frac{v_t}{c^2} dE' \right) \quad dE = \gamma(dE' - v_t dp'_{\parallel}) \quad (5.27)$$

Ahora, si cuando contamos el número de partículas desde la Tierra en una dirección específica de forma instantánea ($dt' = 0$), observamos que, dentro de un volumen d^3r' , se encuentran dN partículas con valores de momentum en un rango $[p', d^3p']$, dN estará dado por:

$$dN = f'(p', T') d^3 p' d^3 r' \quad (5.28)$$

Donde f' es la función de distribución de las partículas observadas desde la Tierra. Estas mismas partículas, en el sistema de referencia comóvil, se encuentran en un volumen $d^3 r$ y con valores de momentum en $[\vec{p}, d^3 p]$, pero en el tiempo dt dado por (5.26) (distinta de cero ya que $dt' = 0$) algunas partículas salen o entran de $d^3 r$. Es por eso que el número de partículas, en este sistema está dado por:

$$dN = f(p, T) d^3 p d^3 r + f(p, T) d^3 p d\vec{S} \cdot \vec{u} dt \quad (5.29)$$

Donde $\vec{u} = c^2 \frac{\vec{p}}{E}$ es la velocidad de la partícula y $d\vec{S}$ es el diferencial de área, con dirección normal, por donde sale la partícula. Ambas expresiones para dN son, simplemente, una variación de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Con $\rho = f(p, T) d^3 p$. Como dN debe ser el mismo en ambos sistemas, debemos igualar (5.28) y (5.29). Entonces:

$$f'(p', T') d^3 p' d^3 r' = f(p, T) d^3 p \left(d^3 r + c^2 dt \frac{\vec{p} \cdot d\vec{S}}{E} \right) \quad (5.30)$$

Con (Ver Figura 5.2):

$$\begin{aligned} d^3 r &= dx_{\parallel} \wedge dx_{\perp,1} \wedge dx_{\perp,2} \\ d\vec{S} &= -(dx_{\parallel} \wedge dx_{\perp,1} \hat{x}_{\perp,2} + dx_{\parallel} \wedge dx_{\perp,2} \hat{x}_{\perp,1} + dx_{\perp,1} \wedge dx_{\perp,2} \hat{x}_{\parallel}) \\ \vec{p} &= -(p_{\parallel} \hat{x}_{\parallel} + p_{\perp,1} \hat{x}_{\perp,1} + p_{\perp,2} \hat{x}_{\perp,2}) \end{aligned}$$

Donde \wedge representa el producto entre diferenciales que es anti-conmutativo. Evaluando en (5.30), usando (5.25) y (5.26), tendremos:

$$f'(p', T') d^3 p' d^3 r' = f(p, T) d^3 p d^3 r' \frac{E'}{E} \quad (5.31)$$

Reemplazando (5.27) en $d^3 p = dp_{\perp,1} \wedge dp_{\perp,2} \wedge dp_{\parallel}$, obtenemos:

$$d^3 p = dp'_{\perp,1} \wedge dp'_{\perp,2} \wedge \gamma \left(dp'_{\parallel} - \frac{v_t}{c^2} dE' \right)$$

Pero sabemos que $E'^2 = c^2(p'^2_{\perp,1} + p'^2_{\perp,2} + p'^2_{\parallel}) + m^2 c^4$. Derivando, llegamos a la relación $E' dE' = c^2(p'_{\perp,1} dp'_{\perp,1} + p'_{\perp,2} dp'_{\perp,2} + p'_{\parallel} dp'_{\parallel})$. Evaluando:

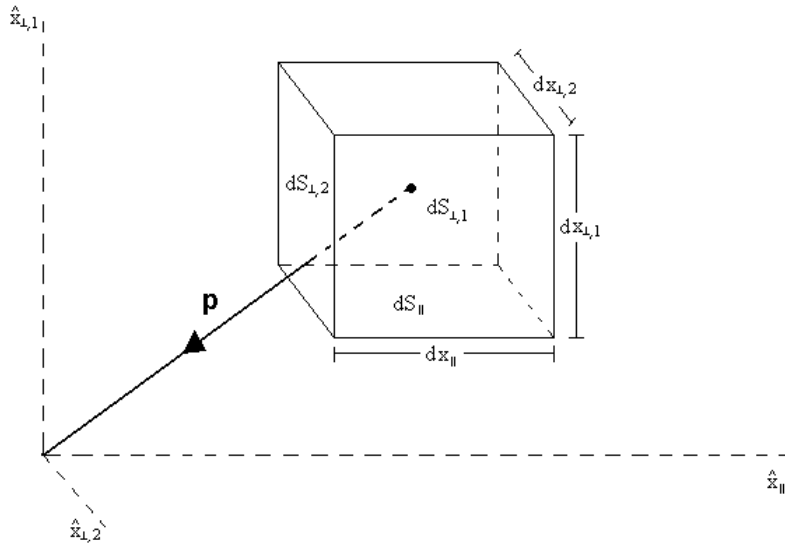


Figura 5.2: Representación del elemento de volumen d^3r donde se muestra cada elemento de superficie. Se puede ver claramente el sentido vectorial de \vec{p} y $d\vec{S}$.

$$d^3p = dp'_{\perp,1} \wedge dp'_{\perp,2} \wedge dp'_{\parallel} \gamma \left(1 - \frac{p'_{\parallel}}{E'} v_t \right)$$

Donde hemos usado que $dp'_{\perp,i} \wedge dp'_{\perp,i} = 0$ por ser un producto anti-conmutativo. Usando (5.25), d^3p se reduce a:

$$d^3p = d^3p' \frac{E}{E'}$$

Entonces, (5.31) se reduce a:

$$f'(p', T') = f(p, T) \tag{5.32}$$

Esto significa que la función distribución es un invariante de Lorentz. En [17] se ha desarrollado de un modo diferente, donde usan:

$$dN = f(p, T) d^3p d^3r$$

Naturalmente, no obtienen que f es invariante de Lorentz, lo cual, por lo recién presentado, aseguramos que es erróneo.

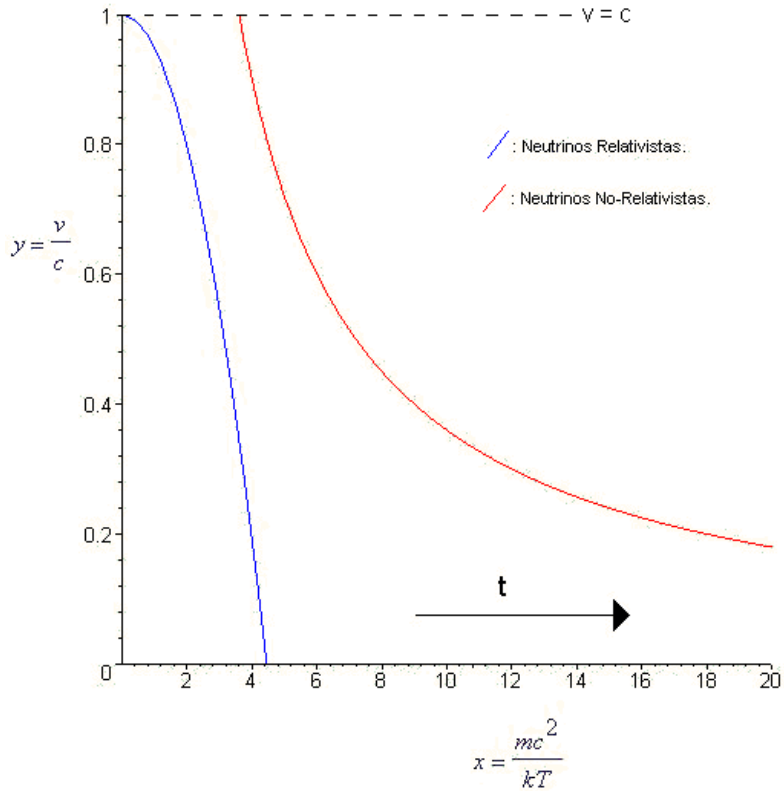


Figura 5.3: Representación de la Velocidad del Neutrino (Ecs. 5.11 y 5.15). Comienza siendo dominado por la expresión relativista (azul) para luego seguir la No Relativista (rojo). La expresión general debe ser una composición de ambas.

5.3. Distribución del CNB

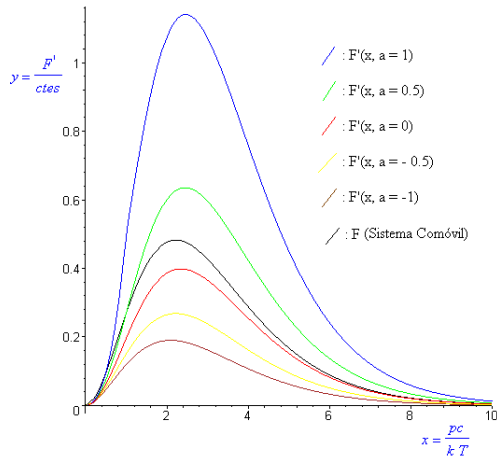


Figura 5.4: Distribución de los Neutrinos Primordiales en el presente (Ec 5.22) para distintos valores de a y $b \simeq 1$ que corresponde a $M_\nu = 0,17$ [eV]. La curva negra representa la distribución en el sistema comóvil.

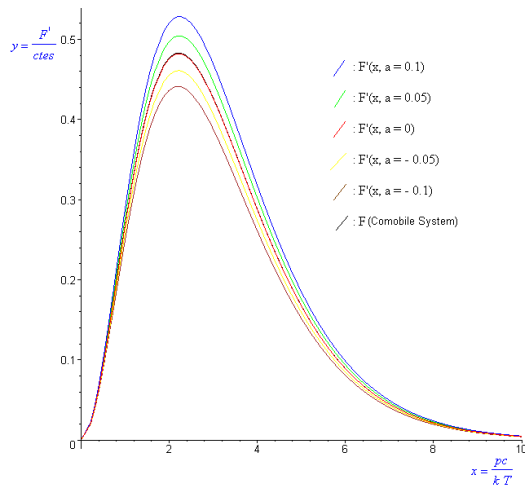


Figura 5.5: Distribución de los Neutrinos Primordiales en el presente (Ec 5.22) para distintos valores de a y $b \simeq 0,1$ que corresponde a $M_\nu = 0,017$ [eV].

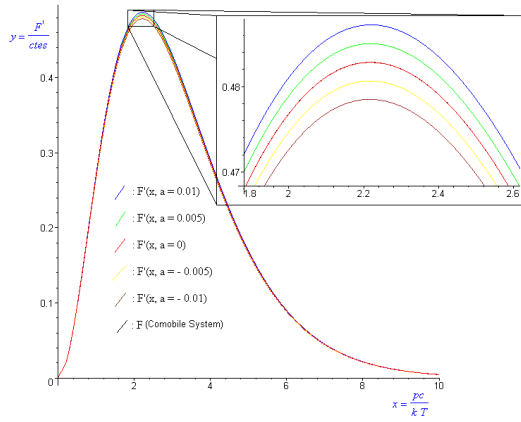


Figura 5.6: Distribución de los Neutrinos Primordiales en el presente (Ec 5.22) para distintos valores de a y $b \simeq 0,01$ que corresponde a $M_\nu = 0,0017$ [eV].

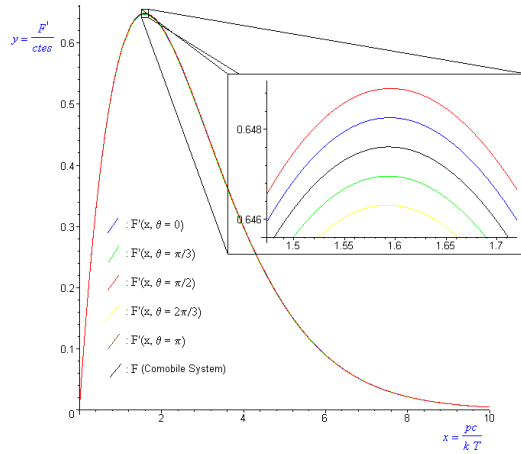


Figura 5.7: Distribución de los Fotones Primordiales en el presente (Ec 5.22) para distintos valores del ángulo de observación θ' .

Bibliografía

- [1] Alfaro, J; González, P. *Velocity and Distribution of Primordial Neutrinos*. Int.l Journal of Modern Physics D. Volume 17, Issue 11, p. 2171-2187.
- [2] Weinberg, S. *Cosmology*. Oxford University Press 2008. Chap. 7.
- [3] Alpher, R. A; Bethe, H; Gamow, G. *The Origin of Chemical Elements*. Physical Review, vol. 73, Issue 7, pp. 803-804.
- [4] Alfaro, J. *Quantum gravity induced Lorentz invariance violation in the standard model: Hadrons*. Physical Review D, vol. 72, Issue 2, id. 024027.
- [5] Alfaro, J. *Quantum Gravity and Lorentz Invariance Violation in the Standard Model*. Physical Review Letters, vol. 94, Issue 22, id. 221302.
- [6] Jacobson, T; Liberati, S; Mattingly, D. *Lorentz violation at high energy: Concepts, phenomena, and astrophysical constraints*. Annals of Physics, Volume 321, Issue 1, p. 150-196.
- [7] Alfaro, J; Andrianov, A. A; Cambiaso, M; Giacconi, P; Soldati, R. *On the consistency of Lorentz invariance violation in QED induced by fermions in constant axial-vector background*. Physics Letters B, Volume 639, Issue 5, p. 586-590.
- [8] Coleman, S; Glashow, S.L. *High-energy tests of Lorentz invariance*. Physical Review D, Vol. 59, 116008.
- [9] Alfaro, J; Palma, G. *Loop quantum gravity corrections and cosmic ray decays*. Physical Review D, vol. 65, Issue 10, id. 103516.
- [10] S.T. Scully and F.W. Stecker *Lorentz Invariance Violation and the Observed Spectrum of Ultrahigh Energy Cosmic Rays*. Astropart.Phys. 31 (2009) 220-225.
- [11] Kolb, E; Turner, M. *The Early Universe*. Frontiers in Physics Series, Vol. 69, Cap. 5 - 6.
- [12] Seljak, Uros; Slosar, Anze; McDonald, Patrick. *Cosmological parameters from combining the Lyman α forest with CMB, galaxy clustering and SN constraints*. JCAP10(2006)014 doi:10.1088/1475-7516/2006/10/014.
- [13] Amina Helmi; Simon D.M. White; Volker Springel. *The phase-space structure of cold dark-matter halos: Insights into the Galactic halo*. Mon.Not.Roy.Astron.Soc.339:834, 2003.
- [14] Amina Helmi; Simon D.M. White; P. Tim de Zeeuw; HongSheng Zhao. *Debris streams in the solar neighbourhood as relicts from the formation of the Milky Way*. Nature 402:53-55, 1999.
- [15] Tomozawa, Y. *Cosmic microwave background dipole, peculiar velocity and Hubble flow*. eprint arXiv:0705.1317.

- [16] Hobson M.P; Barreiro R.B; Toffolatti L; Lasenby A.N; Sanz J.L; Jones A.W; Bouchet F.R. *The effect of point sources on satellite observations of the cosmic microwave background.* arXiv:astro-ph/9810241v1.
- [17] Debbasch, F; Rivet, J. P; van Leeuwen, W. A. *Invariance of the relativistic one-particle distribution function.* Physica A, Volume 301, Issue 1-4, p. 181-195.

Validez de las relaciones de reciprocidad de Onsager para una mezcla binaria inerte relativista

Valdemar Moratto

Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, México D. F. 09340, México.
vale@xanum.uam.mx

Leopoldo García-Colín Scherer

Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, México D. F. 09340, México
El Colegio Nacional, Luis González Obregón 23, Centro Histórico, México D. F. 06020, México
lsgc@xanum.uam.mx

Resumen

En este capítulo estudiamos una mezcla binaria inerte en el esquema de relatividad especial. Partimos de la ecuación de Boltzmann covariante y obtenemos ecuaciones de balance en una representación donde el número de partículas por especie $n_{(i)}, n_{(j)}$, la velocidad baricéntrica U^α y la temperatura T son variables de estado. Para obtener información hidrodinámica compatible con el régimen Navier-Stokes-Fourier de la ecuación de Boltzmann usamos el bien conocido método de Chapman-Enskog a primer orden en los gradientes. Mostramos que con una novedosa elección de las fuerzas termodinámicas así como la introducción de un nuevo flujo termodinámico, *flujo de volumen* es posible hallar la compatibilidad entre la Termodinámica Irreversible Lineal (TIL) y la Teoría Cinética Relativista.

6.1. Introducción

La teoría cinética relativista tiene más de un siglo en que ha sido objeto de estudio por diversos autores. El primer trabajo relevante en esta dirección fue la deducción de la función de distribución para un gas ideal relativista por F. Jüttner [1] en 1911. Para 1940, Lichnerowicz y Marrot [2] escribieron la generalización relativista covariante de la ecuación de Boltzmann. Como sabemos, uno de los principales resultados de la ecuación de Boltzmann sin necesidad de resolverla es poder escribir ecuaciones de balance, obtenidas por R. Marrot [3] en 1948, quien también dio la extensión relativista del teorema H. Con resultados similares encontramos también el trabajo de Taub [4]. A inicios de los años sesenta, W. Israel [5] dio a conocer una teoría muy completa para el gas ideal que inclusive permite calcular coeficientes de transporte. De ahí surgieron múltiples esfuerzos hoy condensados en dos tratados sobre la materia v. gr. la obra de S. de Groot et. al. [6] y más recientemente el libro de Cercignani y Kremer [7]. Ambas son referencias ineludibles para cualquier lector interesado en el tema.

Por otro lado encontramos en la literatura [8, 9] el estudio de un fluido simple en relatividad especial, donde el concepto de *velocidad caótica* (omitido en el análisis histórico) de una molécula se propone como concepto fundamental en la teoría y permite obtener resultados transparentes. En efecto, uno de los autores Leopoldo García-Colín Scherer conjuntamente con Alfredo Sandoval Villalbazo [10] hicieron notar que conceptos como la energía cinética y temperatura locales así como los flujos macroscópicos que generan las fuerzas termodinámicas son muy fáciles de interpretar y de calcular si **no** se ignora el concepto de velocidad caótica. Esto además pone énfasis de una vieja tesis de Eddington, quien afirma que todos los cálculos de cantidades termodinámicas deben hacerse en el sistema comóvil [11]. Obviamente en este sistema sólo tiene sentido la velocidad caótica. Como se afirma y demuestra en la Ref. [8], la transparencia de los resultados es inevitable.

Otro comentario que vale la pena hacer antes de iniciar con el análisis de la mezcla binaria es el hecho de que las variables termodinámicas se definen como invariantes ante transformaciones de Lorentz. Esta propiedad aparecerá en el transcurso de este estudio y debe tenerse muy en cuenta.

Para estudiar una mezcla binaria inerte relativista, la motivación surge fundamentalmente de la estructura que tiene el flujo de calor para una sola especie. Como se puede ver en la referencia [8], el flujo de calor covariante tiene la forma,

$$q^\nu = -h^{\mu\nu} \left[L_T \frac{T_{,\mu}}{T} + L_n \frac{n_{,\mu}}{n} \right], \quad (6.1)$$

donde

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + c^{-2} U^\mu U^\nu, \quad (6.2)$$

es un proyector que tiene la propiedad $h^\mu_\nu U^\nu = 0$ y $g^{\mu\nu}$ es la métrica (en nuestro caso de Minkowski). Los coeficientes L_T y L_n son funciones de las integrales de colisión. Los operadores $(\cdot)_{,\mu}$

representan gradientes, que en este caso están aplicados a variables elegidas como variables de estado. En la Ec. (6.1) vemos dos términos, el primero es proporcional a $\frac{T,\mu}{T}$ que corresponde a la ecuación de Fourier que dice que un gradiente de temperatura genera un flujo de calor. El segundo es un término proporcional al gradiente del número local de partículas $\frac{n,\mu}{n}$ cuyo coeficiente L_n tiende a cero en el caso no-relativista. Este último efecto, inexistente en el caso clásico, ha causado controversia en la literatura [12]. En las referencias [13, 9] se ha mostrado con rigor matemático que a primer orden en los gradientes del sistema, la ecuación (6.1) es la relación constitutiva correcta para el flujo de calor de un gas ideal diluido fuera de equilibrio, contrario a versiones fenomenológicas [14].

La pregunta que surge ahora de forma natural es, dada la estructura de los flujos vectoriales de una mezcla binaria inerte no-relativista (Véanse los capítulos correspondientes a la una mezcla binaria en las Refs. [15] y [16]), ¿qué significado tiene el ahora “efecto cruzado” que aparece en la Ec. (6.1)? ¿Qué significado tiene el término proporcional a $\frac{n,\mu}{n}$? Por simetría puede uno preguntarse si también el flujo de masa genera un flujo de calor. Esto incluso llega a sugerir un teorema de reciprocidad a la Onsager en sistemas de una sola componente.

Para responder esta pregunta nos remitimos buscar la congruencia de una mezcla binaria relativista con la Termodinámica Irreversible Lineal (TIL) [16]-[17].

Como veremos, el hacer la teoría cinética de una mezcla binaria inerte relativista presenta varias alternativas, un hecho que no es una novedad, pues en el caso no-relativista se ha mostrado [18] que la elección de las fuerzas termodinámicas es un paso sutil y fundamental para hallar la compatibilidad entre la teoría cinética y los cuatro postulados de la TIL. Recordemos que estos postulados son [16]-[17]

1. *Hipótesis de equilibrio local*
2. *Extensión de la validez de la segunda ley de la termodinámica a procesos irreversibles*
3. *Relaciones constitutivas lineales*¹
4. *Validez de las relaciones de reciprocidad de Onsager*²

Nosotros construiremos la teoría cinética para una mezcla binaria inerte relativista teniendo siempre en mente que los resultados que obtengamos, sean consistentes con las cuatro hipótesis anteriores.

¹Esta hipótesis supone que los flujos termodinámicos son combinaciones lineales de gradientes de variables termodinámicas.

²Si tenemos un sistema con n flujos y n fuerzas termodinámicas, por la tercer hipótesis de la TIL, podemos escribir a los flujos en una “matriz onsageriana” donde podemos agrupar a todos los coeficientes de transporte en una matriz que según esta hipótesis, debe ser simétrica

6.2. El problema

Comenzamos con el estudio considerando a una mezcla de dos fluidos simples inertes. Usaremos los subíndices (i) y (j) para distinguir ambas especies. Hay dos tipos de partículas y sus masas son $m_{(i)}, m_{(j)}$. La ecuación de Boltzmann que gobierna a la especie (i) es

$$v_{(i)}^\mu f_{(i),\mu} = J(f_{(i)}f_{(i)}) + J(f_{(i)}f_{(j)}) \quad (6.3)$$

y otra análoga para la especie (j) que se obtiene de (6.3) simplemente intercambiando (i) por (j) . Aquí $v_{(i)}^\mu$ es la tetra-velocidad para alguna partícula de la especie (i) , y los términos de colisión se escriben como

$$J(f_{(i)}f_{(j)}) = \int (f'_{(i)}f'_{(j)} - f_{(i)}f_{(j)}) \mathcal{F}_{(ij)} \Sigma_{(ij)} d\Omega_{(ij)} dv_{(j)}^*, \quad (6.4)$$

para cualquier término del lado derecho de la Ec. (6.3). Las integrales se hacen sobre una diferencial invariante de la velocidad definida como

$$dv_{(j)}^* \equiv \frac{d^3 v_{(j)}}{v_{(j)}^4}, \quad (6.5)$$

donde $v_{(j)}^4$ es la componente temporal de $v_{(j)}^\mu$. Hay que notar ambas ecuaciones están acopladas a través del término de colisión $J(f_{(i)}f_{(j)}) = J(f_{(j)}f_{(i)})$.

Aquí los contenidos físicos de todas las cantidades involucradas son esencialmente los mismos que en los casos no-relativistas. Las cantidades señaladas con una ' indican que están evaluadas en la velocidad molecular después de una colisión binaria. Tenemos además un flujo invariante

$$\mathcal{F}_{(ij)} = \frac{1}{c^2} v_{(i)}^4 v_{(j)}^4 = \frac{1}{c} \sqrt{\gamma_{v_{(i)}} \gamma_{v_{(j)}} \left(v_{(i)}^m v_{m(j)} - c^2 \right)^2 - c^4}, \quad (6.6)$$

que tiende a la velocidad relativa en el caso clásico. La sección diferencial eficaz de colisión invariante es $\Sigma_{(ij)} d\Omega_{(ij)}$, donde $d\Omega_{(ij)}$ es el elemento de ángulo sólido para colisiones binarias entre partículas de la especies (i) y (j) respectivamente. En (6.6), $v_{(i)}^4$ y $v_{(i)}^m$ son la parte temporal y espacial de $v_{(i)}^\mu$ respectivamente.

Es muy importante señalar que tanto $\mathcal{F}_{(ij)}$ así como $\Sigma_{(ij)} d\Omega_{(ij)}$ satisfacen una simetría análoga a aquella correspondiente a la del principio de reversibilidad microscópica [25, 26], es decir

$$F_{(ij)} \Sigma_{(ij)} d\Omega_{(ij)} \Big|_{(v_{(i)}^\mu, v_{(j)}^\mu \rightarrow v_{(i)}^\mu, v_{(j)}^\mu)} = F_{(ij)} \Sigma_{(ij)} d\Omega_{(ij)} \Big|_{(v_{(i)}^\mu, v_{(j)}^\mu \rightarrow v_{(i)}^\mu, v_{(j)}^\mu)}. \quad (6.7)$$

El hecho de que tengamos dicha simetría genera un criterio de irreversibilidad termodinámica, lo podemos entender enunciando el teorema H para una mezcla: Para algún estado inicial de la función de distribución $f_{(i)}$, un gas gobernado por la ecuación de Boltzmann tiende al equilibrio local si y sólo si

$$H_{,\mu}^\mu \leq 0, \quad (6.8)$$

para todas las colisiones binarias tales que

$$f'_{(i)} f'_{(j)} = f_{(i)} f_{(j)} \quad (6.9)$$

donde la función H^μ se define como

$$H^\mu \equiv - \sum_{(i)} \int v_{(i)}^\mu f_{(i)} (\ln f_{(i)} - 1) dv_{(i)}^*. \quad (6.10)$$

Esta formulación del teorema H, obtenida en detalle para el caso de una componente en [6] se puede asociar con la entropía local siempre y cuando la función $f_{(i)}$ esté escrita en términos de variables termodinámicas. Este teorema expresa que la función definida en (6.10) es una cantidad que no puede decrecer. Por otra parte, resolver la ecuación (6.9) e introduciendo información termodinámica permite describir a la función de distribución asociada con el equilibrio local. De hecho, si elegimos a las variables que describen a la mezcla como el número local de partículas para cada especie $n_{(i)}, n_{(j)}$, la velocidad baricéntrica U^μ y la temperatura T e imponemos que éstas deben estar evaluadas únicamente con una función de distribución de equilibrio local uno puede hallar que [6],

$$f_{(i)}^{(0)} = \frac{n_{(i)}}{4\pi c^3 z_{(i)} \mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z_{(i)}}\right)} \exp\left(\frac{U^\beta v_{(i)\beta}}{z_{(i)} c^2}\right). \quad (6.11)$$

La Ec. (6.11) es la función de distribución de Jüttner para el caso de mezclas, con $z_{(i)} = \frac{k_B T}{m_{(i)} c^2}$ y $\mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z_{(i)}}\right)$ es la función modificada de Bessel de orden 2. Dado que la Ec (6.11) es un invariante relativista la podemos escribir en el marco comóvil sin pérdida de generalidad

$$f_{(i)}^{(0)} = \frac{n_{(i)}}{4\pi c^3 z_{(i)} \mathcal{K}_2\left(\frac{1}{z_{(i)}}\right)} \exp\left(-\frac{\gamma k_{(i)}}{z_{(i)}}\right), \quad (6.12)$$

donde $\gamma_k = \left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)^{-1/2}$.

6.3. Ecuaciones de balance

A continuación nos ocuparemos en hallar las ecuaciones de transporte para la mezcla. Como ya hemos dicho, usaremos la representación $n_{(i)}, n_{(j)}, U^\mu, T$. En las colisiones, la masa de las partículas, ímpetu y energía se conservan. Entonces nos referiremos a “invariantes colisionales” cuando usemos las siguientes cantidades,

$$\{m_{(i)}, m_{(i)} v_{(i)}^\alpha\}, \quad (6.13)$$

claramente la energía está contenida en la componente temporal del tetra-ímpetu i.e. $m_{(i)} v_{(i)}^4$. Comenzamos multiplicando $m_{(i)}$ con la Ec. (6.3) e integramos sobre todas las velocidades, tenemos

$$\left(m_{(i)} \int v_{(i)}^\alpha f_{(i)} dv_{(i)}^*\right)_{;\alpha} = 0, \quad (6.14)$$

6.3. Ecuaciones de balance

donde la operación $(\)_{;\alpha}$ representa una derivada covariante, sin embargo, como sólo estamos considerando una métrica de Minkowski, ésta se reduce a un gradiente $(\)_{,\alpha}$. De la ecuación de conservación (6.14) definimos el tetra-flujo covariante:

$$N_{(i)}^{\alpha} \equiv m_{(i)} \int v_{(i)}^{\alpha} f_{(i)} dv_{(i)}^*, \quad (6.15)$$

que es una cantidad conservada,

$$N_{(i);\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (6.16)$$

Si tomamos la contribución de ambas especies, tenemos

$$(N_{(i)}^{\alpha} + N_{(j)}^{\alpha})_{;\alpha} \equiv N_{;\alpha}^{\alpha} = 0, \quad (6.17)$$

por lo que el *tetra-flujo covariante total*

$$N^{\alpha} = N_{(i)}^{\alpha} + N_{(j)}^{\alpha} \quad (6.18)$$

se conserva.

Definamos la *tetra-velocidad baricéntrica o hidrodinámica* covariante de la mezcla U^{α} como

$$N^{\alpha} = (n_{(i)} + n_{(j)}) U^{\alpha}, \quad (6.19)$$

donde la densidad de partículas total es $n = n_{(i)} + n_{(j)}$. Por lo tanto podemos escribir la tetra-velocidad baricéntrica en términos de las tetra-velocidades hidrodinámicas de las especies,

$$nU^{\alpha} = n_{(i)}U_{(i)}^{\alpha} + n_{(j)}U_{(j)}^{\alpha}, \quad (6.20)$$

donde

$$n_{(i)}U_{(i)}^{\alpha} = m_{(i)} \int v_{(i)}^{\alpha} f_{(i)} dv_{(i)}^* \quad (6.21)$$

según la Ec. (6.15).

Dado que todo lo anterior le hemos hecho en un formalismo covariante, la Ec. (6.15) la podemos escribir como,

$$N_{(i)}^{\alpha} = \mathcal{L}_{\beta}^{\alpha} J_{(i)}^{\beta} \quad (6.22)$$

donde $J_{(i)}^{\beta}$ es el *flujo difusivo* para la especie (i) y $\mathcal{L}_{\beta}^{\alpha}$ es la transformación de Lorentz del marco que se mueve con el fluido en la velocidad baricéntrica U^{α} (es decir una localidad) a un marco arbitrario. Dicho marco, donde la velocidad hidrodinámica que se mide es $\{0, 0, 0, c\}$ es el ya mencionado *marco comóvil*, y representa un concepto fundamental en teoría cinética. A la velocidad molecular que se mide en el marco comóvil se le conoce como *velocidad caótica o térmica* $K_{(i)}^{\beta}$, para la especie (i) y obedece una transformación de Lorentz, a saber,

$$v_{(i)}^{\alpha} = \mathcal{L}_{\beta}^{\alpha} K_{(i)}^{\beta}. \quad (6.23)$$

La validez de las ecuaciones (6.22) y (6.23) ha sido ampliamente justificada en la Ref. [8]; la extensión del caso de una componente al de la mezcla es trivial. Insistimos en el hecho de que definir a la velocidad caótica Eq. (6.23) es esencial en la teoría cinética pues permite aislar los flujos disipativos de los efectos convectivos.

Notemos entonces que el *flujo difusivo total* se puede escribir como un promedio de las velocidades caóticas:

$$J^\alpha = J_{(i)}^\alpha + J_{(j)}^\alpha = m_{(i)} \int K_{(i)}^\alpha f_{(i)} dK_{(i)}^* + m_{(j)} \int K_{(j)}^\alpha f_{(j)} dK_{(j)}^*, \quad (6.24)$$

donde $dK_{(i)}^* = \frac{d^3 K_{(i)}}{K_{(i)}^4}$ representa un diferencial invariante, equivalente al que está definido en la ecuación (6.5). Al usar las ecuaciones (6.18), (6.19) y (6.22) se puede demostrar que

$$J_{(i)}^\alpha + J_{(j)}^\alpha = (0, 0, 0, n), \quad (6.25)$$

por lo que el *número local de partículas* queda definido como la componente temporal del flujo difusivo, a saber

$$n = n_{(i)} + n_{(j)} = \int \gamma_{k_{(i)}} f_{(i)} dK_{(i)}^* + \int \gamma_{k_{(j)}} f_{(j)} dK_{(j)}^*. \quad (6.26)$$

Es importante subrayar que la componente temporal de $J_{(i)}^\alpha$ es $J_{(i)}^4 = n_{(i)}$, que es el número local de partículas de la especie (i) y legítima variable de estado. Por lo tanto, *el flujo disipativo de masa es un vector tridimensional*.

Por otro lado, para hallar las ecuaciones de balance para el ímpetu y la energía multiplicamos a $m_{(i)} v_{(i)}^\beta$ con la ecuación de Boltzmann e integramos en $dv_{(i)}^*$, resulta

$$\left(\int m_{(i)} v_{(i)}^\beta (v_{(i)}^\alpha f_{(i)}) dv_{(i)}^* \right)_{;\alpha} = 0, \quad (6.27)$$

donde la cantidad

$$T_{(i)}^{\beta\alpha} \equiv m_{(i)} \int v_{(i)}^\beta v_{(i)}^\alpha f_{(i)} dv_{(i)}^* \quad (6.28)$$

se define como el *tensor ímpetu-energía* covariante para la especie (i) , y es una cantidad que se conserva

$$\left(T_{(i)}^{\beta\alpha} \right)_{;\alpha} = 0. \quad (6.29)$$

El tensor ímpetu-energía para la mezcla, tomando la contribución de ambas especies es

$$T^{\beta\alpha} \equiv T_{(i)}^{\beta\alpha} + T_{(j)}^{\beta\alpha}, \quad (6.30)$$

entonces,

$$\left(T^{\beta\alpha} \right)_{;\alpha} = 0, \quad (6.31)$$

implicando que $T^{\beta\alpha}$ se conserva.

Con ayuda de la definición (6.28) y la Ec. (6.30) podemos escribir,

$$T^{\beta\alpha} = T_{(i)}^{\beta\alpha} + T_{(j)}^{\beta\alpha} = m_{(i)} \int v_{(i)}^\beta v_{(i)}^\alpha f_{(i)} dv_{(i)}^* + m_{(j)} \int v_{(j)}^\beta v_{(j)}^\alpha f_{(j)} dv_{(j)}^*, \quad (6.32)$$

y además por (6.31),

$$\left(m_{(i)} \int v_{(i)}^\beta v_{(i)}^\alpha f_{(i)} dv_{(i)}^* + m_{(j)} \int v_{(j)}^\beta v_{(j)}^\alpha f_{(j)} dv_{(j)}^* \right)_{;\alpha} = 0. \quad (6.33)$$

Nuevamente, por las razones que hemos expuesto acerca de que el marco comóvil es de singular interés en teoría cinética podemos escribir a $T^{\beta\alpha}$ como una transformación desde el marco comóvil a otro arbitrario de la siguiente manera,

$$T^{\beta\alpha} = \mathcal{L}_\gamma^\beta \mathcal{L}_\phi^\alpha \left(\tilde{T}_{(i)}^{\gamma\phi} + \tilde{T}_{(j)}^{\gamma\phi} \right), \quad (6.34)$$

es decir

$$T^{\beta\alpha} = \mathcal{L}_\gamma^\beta \mathcal{L}_\phi^\alpha \tilde{T}^{\gamma\phi}. \quad (6.35)$$

Aquí claramente

$$\tilde{T}^{\beta\alpha} = m_{(i)} \int K_{(i)}^\beta K_{(i)}^\alpha f_{(i)} dK_{(i)}^* + m_{(j)} \int K_{(j)}^\beta K_{(j)}^\alpha f_{(j)} dK_{(j)}^*, \quad (6.36)$$

está medido en el marco comóvil.

Para hallar una expresión irreducible del tensor ímpetu-energía, procedamos de la siguiente manera. Siguiendo las ideas de Steven Weinberg [27] y en apego a la idea fundamental del método de Chapman-Enskog, es decir, escribir las cantidades que describen al sistema como una suma donde el primer término está asociado al equilibrio local y los demás a lo que está fuera de equilibrio, definamos

$$\tilde{T}^{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ne \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & q_1 \\ \pi_{12} & \pi_{22} & \pi_{23} & q_2 \\ \pi_{13} & \pi_{23} & \pi_{33} & q_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

Si comparamos la Ec. (6.37) con (6.36) teniendo en cuenta a priori el desarrollo a primer orden en los gradientes $f_{(i)} = f_{(i)}^{(0)} + f_{(i)}^{(1)} = f_{(i)}^{(0)} (1 + \phi_{(i)})$ como establece el método Chapman-Enskog, podemos inmediatamente identificar a la presión hidrostática como

$$p = p_{(i)} + p_{(j)} = m_{(i)} \int K_{(i)}^a K_{(i)}^a f_{(i)}^{(0)} dK_{(i)}^* + m_{(j)} \int K_{(j)}^a K_{(j)}^a f_{(j)}^{(0)} dK_{(j)}^*. \quad (6.38)$$

En nuestra notación, los índices latinos son la parte espacial (corren del 1 al 3) de objetos tensoriales, mientras que los índices griegos corren del 1 al 4 donde el 4 es la parte temporal. La densidad de energía por partícula queda definida como

$$\begin{aligned} ne &= n_{(i)} e_{(i)} + n_{(j)} e_{(j)} = m_{(i)} \int K_{(i)}^4 K_{(i)}^4 f_{(i)}^{(0)} dK_{(i)}^* + m_{(j)} \int K_{(j)}^4 K_{(j)}^4 f_{(j)}^{(0)} dK_{(j)}^* \\ &= m_{(i)} \int \left(c^2 \gamma_{k(i)}^2 \right) f_{(i)}^{(0)} dK_{(i)}^* + m_{(j)} \int \left(c^2 \gamma_{k(j)}^2 \right) f_{(j)}^{(0)} dK_{(j)}^*. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Por otra parte, las componentes del tensor $\Pi^{\alpha\beta}$, que están asociadas con los efectos disipativos y contienen por tanto a las viscosidades, están dadas por,

$$\begin{aligned}\Pi^{\alpha\beta} &= \overset{\circ}{\Pi}_{(i)}^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{\Pi}_{(j)}^{\alpha\beta} + \tau_{(i)}\mathcal{I}^{\alpha\beta} + \tau_{(j)}\mathcal{I}^{\alpha\beta} \\ &= m_{(i)}h_{\alpha\beta} \int \left(K_{(i)}^{\alpha} K_{(i)}^{\beta} \right) f_{(i)}^{(1)} dK_{(i)}^* + m_{(j)}h_{\alpha\beta} \int \left(K_{(j)}^{\alpha} K_{(j)}^{\beta} \right) f_{(j)}^{(1)} dK_{(j)}^* \\ &\quad + \tau_{(i)}m_{(i)}h_{\alpha\beta}\mathcal{I}^{\alpha\beta} + \tau_{(j)}m_{(j)}h_{\alpha\beta}\mathcal{I}^{\alpha\beta}\end{aligned}\quad (6.40)$$

donde $\overset{\circ}{(\)}$ representa un tensor sin traza y $\mathcal{I}^{\alpha\beta}$ un tensor unitario.

Por último el *flujo de calor* se puede escribir como

$$q^{\alpha} = q_{(i)}^{\alpha} + q_{(j)}^{\alpha} = m_{(i)}c^2h_{\beta}^{\alpha} \int \gamma_{k(i)} K_{(i)}^{\beta} f_{(i)}^{(1)} dK_{(i)}^* + m_{(j)}c^2h_{\beta}^{\alpha} \int \gamma_{k(j)} K_{(j)}^{\beta} f_{(j)}^{(1)} dK_{(j)}^*. \quad (6.41)$$

Hay que notar que la componente temporal, es decir $\alpha = 4$ del flujo de calor (que se define en el marco comóvil) es precisamente la densidad de energía por partícula Ec. (6.39). Así que *el flujo de calor es un vector tridimensional*.

Ahora, tomando la Ec. (6.37) y desarrollándola con ayuda de (6.35) luego de unos pasos algebraicos se obtiene que,

$$T^{\alpha\beta} = pg^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2}(p + ne)U^{\alpha}U^{\beta} + \frac{1}{c^2}(U^{\alpha}\mathcal{L}_{\mu}^{\beta}q^{\mu} + U^{\beta}\mathcal{L}_{\mu}^{\alpha}q^{\mu}) + \mathcal{L}_{\mu}^{\alpha}\mathcal{L}_{\nu}^{\beta}\Pi^{\mu\nu}, \quad (6.42)$$

donde $g^{\alpha\beta}$ es la métrica de Minkowski y

$$\Pi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{22} & \pi_{23} & 0 \\ \pi_{13} & \pi_{23} & \pi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

es el *tensor de viscosidades*.

La forma en que aquí hemos descrito la definición para los flujos de calor e ímpetu es distinta a aquella que usan los autores A. L. García-Perciante y A. Sandoval-Villalbaz para el caso del fluido simple relativista en la Ref. [8]. En el caso de fluido simple relativista, parten de la construcción de un tensor irreducible en términos de U^{μ} y luego identifican los flujos como cantidades definidas en el marco comóvil. En este caso lo hemos hecho “al revés”, es decir, primero definimos los flujos termodinámicos en el marco comóvil, y luego de forma natural con una transformación de Lorentz obtenemos el tensor irreducible (6.42). Las dos formas de proceder son completamente equivalentes. De hecho, aquí podríamos partir de un tensor irreducible desarrollado con U^{α} y llegar a la ecuación (6.42). Insistimos que las dos formas representan exactamente lo mismo en términos físicos.

6.3.1. El flujo de volumen

Ahora, y a reserva de mostrar su utilidad después, introducimos una novedosa cantidad microscópica que nos ayudará a demostrar que sí se puede obtener la compatibilidad entre la Teoría Cinética y la Termodinámica Irreversible Lineal.

Consideremos el movimiento de una partícula del sistema cuando choca con otra. Luego de la colisión, la primera viajará una distancia λ hasta que choque con alguna tercer partícula; a λ se le conoce como trayectoria libre. Hay que recordar que el tiempo que dura una colisión es mucho menor que el tiempo que tarda la partícula en su trayectoria libre. Ahora bien, tomemos la longitud λ como una longitud característica de una partícula en una localidad suponiendo que es mucho más grande que el tamaño de la partícula pero mucho más pequeña que el tamaño de la localidad. Construyamos ahora un volumen cuya longitud característica sea λ , por ejemplo una esfera $V = \frac{4}{3}\pi\lambda^3$ cuyo centro es la partícula. La partícula siempre se encuentra en el centro de la esfera, véase la figura 1 a)

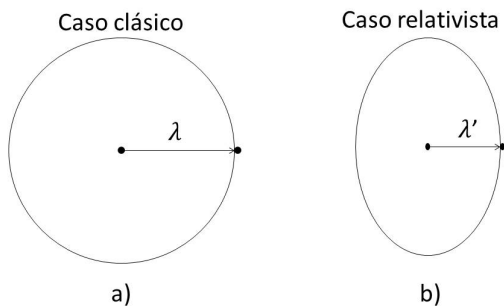


Figura 6.1: a) En el movimiento clásico de una partícula la longitud λ define una esfera. b) En el movimiento relativista, la esfera se ve deformada debido a la no invarianza de la distancia, se tiene ahora una esfera oblata con semiradios λ y λ' .

Si la rapidez de la partícula es comparable con la de la luz, habrá necesariamente una contracción en el volumen de la esfera en la dirección de su movimiento, es decir un semieje se verá contraído $\lambda' = \gamma_{k(i)} \lambda$, véase figura 1 b). En tal caso, tendremos una esfera oblata en dirección del movimiento de la partícula, cuyo volumen aparente será $V' = \gamma_{k(i)} \frac{4}{3} \pi \lambda^3$. El cambio de volumen ΔV respecto al caso no relativista es,

$$\Delta V \equiv V' - V = \frac{4}{3} \pi \lambda^3 \left(\gamma_{k(i)} - 1 \right), \quad (6.44)$$

donde V' y V representan el volumen de la esfera en el caso relativista y no-relativista respectivamente.

Este proceso es lo que da lugar a lo que de ahora en adelante llamaremos *flujo de volumen* o *flujo volumétrico*. El sistema ahora tiene aparentemente, una variable de estado adicional. Para explorar su significado, establecemos la ecuación de transporte que lo caracteriza. Siguiendo el método usual, multiplicamos la ecuación de Boltzmann con la cantidad que corresponde al cambio en el volumen microscópico $\frac{4}{3} \pi \lambda^3 \left(\gamma_{k(i)} - 1 \right)$ e integramos en las velocidades $dK_{(i)}^*$, dando como resultado,

$$\begin{aligned} \left(\int \left(\gamma_{k(i)} - 1 \right) K_{(i)}^\alpha f_{(i)} dK_{(i)}^* \right)_{,\alpha} &= \int \left(\gamma_{k(i)} - 1 \right) \left(J_{(ii)} + J_{(ij)} \right) dK_{(i)}^* \\ &= \pi_{vol}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

La Ec. (6.45) resulta ser una ecuación de balance para el cambio de volumen en el gas, es una cantidad que no se conserva pues $\pi_{vol} \neq 0$. Por consiguiente, el *flujo de volumen* por especie lo definimos como,

$$J_{v(i)}^\mu = \int \left(\gamma_{k(i)} - 1 \right) K_{(i)}^\mu f_{(i)} dK_{(i)}^*, \quad (6.46)$$

y para la mezcla hay que sumar sobre (i)

$$J_V^\mu = \sum_{(i)} \int \left(\gamma_{k(i)} - 1 \right) K_{(i)}^\mu f_{(i)} dK_{(i)}^*. \quad (6.47)$$

Notemos que en el límite no relativista, la integral del lado derecho de la Ec. (6.45) se hace cero, lo que implica que no hay cambio de volumen, $\pi_{vol} = 0$. Además en ese límite tenemos $\left(\gamma_{k(i)} - 1 \right) \rightarrow 0$ por lo que $\vec{J}_{v(i)} = 0$. Hay que notar también que para la componente $\mu = 4$, es decir la componente temporal del flujo de volumen, es proporcional a $\int \left(\gamma_{k(i)} - 1 \right) \gamma_{k(i)} f_{(i)} dK_{(i)}^*$ que es esencialmente $e - n$. Por lo tanto el flujo de volumen es un vector tridimensional.

Para continuar con el desarrollo, necesitamos las ecuaciones de Euler. Para la masa tenemos [28]

$$n_{(i)} U_{;\alpha}^\alpha + \dot{n}_{(i)} = 0, \quad (6.48)$$

donde $\dot{(\)} = U^\mu (\)_{,\mu}$. Para el ímpetu

$$\tilde{\rho} \dot{U}^\beta + h^{\beta\nu} p_{,\nu} = 0, \quad (6.49)$$

donde hemos definido

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{c^2} (ne + p), \quad (6.50)$$

por simple conveniencia, $\tilde{\rho}$ tiende a la densidad de masa usual en el límite no-relativista. Por último, para la energía interna

$$n\dot{e} + pU_{,\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (6.51)$$

En nuestro caso, es decir un gas ideal tenemos que $e = e(T)$ la energía interna depende de la temperatura únicamente. De esto se desprende que $e = C_v T$, y por lo tanto la Ec. (6.51) es una ecuación para la temperatura. El lector interesado en ver los detalles de la obtención de las ecuaciones (6.48-6.51) puede consultar la Ref. [28].

6.4. Método de Chapman-Enskog

En esta sección aplicaremos las dos hipótesis asociadas con el método de Chapman-Enskog con las que se puede obtener el régimen Navier-Stokes-Fourier. Primero desarrollamos a la función de distribución como

$$f_{(i)} = f_{(i)}^{(0)} (1 + \phi_{(i)}), \quad (6.52)$$

donde $f_{(i)}^{(0)}$ es la función de distribución de equilibrio local descrita en la Ec. (6.11) y $\phi_{(i)}$ que representa la existencia de los gradientes es la corrección lineal de $f_{(i)}^{(0)}$. La segunda hipótesis conocida como *hipótesis funcional* implica proyectar la dependencia (x^μ, v^μ) de $f_{(i)}$ a un espacio termodinámico $n_{(i)}, U^\mu, T$, es decir $f_{(i)} = f_{(i)}(x^\mu, v^\mu | n_{(i)}, U^\mu, T)$. La idea es esencialmente hacer el desarrollo (6.52) en la ecuación de Boltzmann (6.3). Del lado izquierdo de (6.3) aparecen derivadas respecto a x^α y v^α pero con ayuda de la hipótesis funcional se obtienen términos que son derivadas de variables termodinámicas que luego se sustituyen con las ecuaciones de Euler (6.48), (6.49) y (6.51). Luego de hacer un álgebra engorrosa pero directa, la Ec. (6.3) se puede escribir como,

$$\begin{aligned} v_{(i)}^\mu \left[\frac{1}{c^2} \left(1 + g_{(i)} \frac{k_B}{C_v} \right) U_\mu U_{,\alpha}^\alpha \right] + v_{(i)}^\mu \left[\frac{1}{c^4 z_{(i)} \tilde{\rho}} U_\mu v_{(i)\alpha} h^{\alpha\nu} (p, \nu) + h_\mu^\nu \ln n_{(i),\nu} \right] \\ - v_{(i)}^\mu \left[g_{(i)} h_\mu^\nu \ln T_{,\nu} \right] + v_{(i)}^\mu \left[h_\mu^\nu \frac{v_{(i)\alpha}}{z_{(i)} c^2} U_{,\nu}^\alpha \right] \\ = \left[C(\phi_{(i)}) + C(\phi_{(i)}, \phi_{(j)}) \right], \end{aligned} \quad (6.53)$$

donde

$$g_{(i)} \equiv 1 + \frac{1}{z_{(i)} c^2} U^\mu v_{(i)\mu} + \frac{\mathcal{K}_1 \left(\frac{1}{z_{(i)}} \right)}{2z_{(i)} \mathcal{K}_2 \left(\frac{1}{z_{(i)}} \right)} + \frac{\mathcal{K}_3 \left(\frac{1}{z_{(i)}} \right)}{2z_{(i)} \mathcal{K}_2 \left(\frac{1}{z_{(i)}} \right)}, \quad (6.54)$$

además el término de colisiones linealizado está dado por

$$C(\phi_{(i)}, \phi_{(j)}) = \int \cdots \int f_{(i)}^{(0)} f_{(j)}^{(0)} (\phi_{(j)}' + \phi_{(i)}' - \phi_{(j)} - \phi_{(i)}) F_{(ij)} \Sigma_{(ij)} d\Omega_{(ji)} dv_{(j)}^* \quad (6.55)$$

y

$$C(\phi_{(i)}) = \int \cdots \int f_{(i)}^{(0)} f_{(i)1}^{(0)} (\phi_{(i)'} + \phi_{(i)1}' - \phi_{(i)} - \phi_{(i)1}) F_{(ii)} \Sigma_{(ii)} d\Omega_{(ii)} dv_{(i)1}^* \quad (6.56)$$

La ecuación (6.53) es ahora una ecuación integral covariante para $\phi_{(i)}$, así que vamos ahora a concentrarnos en el marco comóvil y por el momento omitiremos los términos tensoriales de orden 2 pues deseamos hallar los flujos vectoriales. Los términos no vectoriales no contribuyen a los flujos vectoriales dada su simetría par. Para evaluar en el marco comóvil hay que recordar que $U^\alpha = \{0, 0, 0, c\}$ y que la velocidad molecular $v_{(i)}^\alpha$ ahora es la velocidad caótica $K_{(i)}^\alpha$. El proyectores Ec. (6.2) en el marco comóvil toma la forma

$$h^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.57)$$

Entonces, en el marco comóvil la ecuación (6.53) se escribe como,

$$K_{(i)}^m \left\{ -\gamma_{k_{(i)}} \frac{1}{z_{(i)} c^2 \bar{\rho}} p_{,m} + (\ln n_{(i)})_{,m} + \left[1 + \frac{1}{z_{(i)}} (\gamma_{k_{(i)}} - G_{(i)}) \right] (\ln T)_{,m} \right\} \\ = [C(\phi_{(i)}) + C(\phi_{(i)}, \phi_{(j)})], \quad (6.58)$$

donde

$$G_{(i)} \equiv \frac{\mathcal{K}_3 \left(\frac{1}{z_{(i)}} \right)}{\mathcal{K}_2 \left(\frac{1}{z_{(i)}} \right)}. \quad (6.59)$$

El paso siguiente en el procedimiento es muy sutil. En efecto, debemos elegir un posible arreglo para la ecuación (6.58) con el fin de introducir una idea preliminar de las fuerzas termodinámicas, pues según la TIL, la forma canónica de éstas es sólo a través de el cálculo de la producción de entropía, como que veremos más adelante.

Si bien hay varias maneras de proceder en el agrupamiento de la Ec. (6.58), en este capítulo sólo describiremos aquella que es consistente con las hipótesis de la TIL, el lector interesado en ver otras posibilidades pero que no son compatibles con la TIL puede ver la Ref. [29]. Luego de unos pasos algebraicos usando la ecuación de gas ideal $p = nk_B T$ tenemos que la Ec. (6.58) se puede escribir de la forma

$$f_{(i)}^{(0)} K_{(i)}^m \left\{ \left[d_m^{(i)} \right] + \frac{1}{z_{(i)}} (\gamma_{k_{(i)}} - G_{(i)}) \left[\frac{T_{,m}}{T} \right] - (\gamma_{k_{(i)}} - G_{(i)}) \left[\frac{n_{(i)} m_{(i)} p_{,m}}{\bar{\rho} p_{(i)}} \right] \right\} \\ = [C(\phi_{(i)}) + C(\phi_{(i)}, \phi_{(j)})], \quad (6.60)$$

donde

$$d_m^{(i)} = n_{(j)} \left(\frac{m_{(j)} G_{(j)} - m_{(i)} G_{(i)}}{\bar{\rho}} \right) \frac{p_{,m}}{p} + \frac{n}{n_{(i)}} n_{(i)0,m} \quad \text{con} \quad n_{(i)0} \equiv \frac{n_{(i)}}{n} \quad (6.61)$$

y

$$V_{(i)m} = \frac{m_{(i)}}{m_{(j)}} V_{(j)m} \equiv V_m. \quad (6.62)$$

A reserva de hallar la solución de (6.60), vemos a priori que estamos considerando tres fuerzas termodinámicas, la fuerza de difusión $d_m^{(i)}$, la fuerza calórica $\left[\frac{T_{,m}}{T}\right]$ y una nueva fuerza $V_{(i)m}$, cuyo significado exhibiremos más adelante. El planteamiento de la solución no va más allá que seguir las ideas convencionales, entonces la solución se escribe como

$$\begin{aligned} \phi_{(i)} &= \phi_{(i)\text{INHOMOGENEA}} + \phi_{(i)\text{HOMOGENEA}} \\ &= -K_{(i)}^m A'_{(i)} (\ln T)_{,m} - K_{(i)}^m B'_{(i)} V_{(i)m} - K_{(i)}^m D'_{(i)} d_m^{(i)} + \alpha_{(i)} + \beta_{(i)m} K_{(i)}^m + \beta_{(i)4} K_{(i)}^4, \end{aligned} \quad (6.63)$$

donde $\beta_{(i)m}$, $\beta_{(i)4}$ y $\alpha_{(i)}$ son un vector y dos constantes arbitrarias que no dependen de la velocidad. Los coeficientes indeterminados $A'_{(i)}$, $B'_{(i)}$ y $D'_{(i)}$ dependen de las velocidades caóticas y las variables termodinámicas. Para hallar la solución única, se imponen las condiciones subsidiarias

$$\sum_{(i)} \int f_{(i)}^{(0)} \left\{ \begin{array}{l} m_{(i)} \gamma_{k(i)}^2 \\ m_{(i)} K_{(i)}^m \\ m_{(i)} K_{(i)}^4 \end{array} \right\} \phi_{(i)} dK_{(i)}^* = 0, \quad (6.64)$$

y luego de un poco de álgebra, análoga a la del caso de la mezcla no-relativista la solución se escribe como

$$\phi_{(i)} = -K_{(i)}^m A_{(i)} (\ln T)_{,m} - K_{(i)}^m B_{(i)} V_{(i)m} - K_{(i)}^m D_{(i)} d_m^{(i)}. \quad (6.65)$$

Ahora que conocemos la solución (6.65) de la ecuación de Boltzmann linealizada (6.60) procedemos a escribir los flujos vectoriales que hemos definido y todos sus coeficientes de transporte. Luego los vamos a agrupar en una “matriz onsageriana” que nos va a permitir visualizar en una forma esquemática cuál es la contribución a los flujos vectoriales debida a cada fuerza termodinámica. Es importante señalar que para los fines de este trabajo no es necesario calcular de forma explícita los coeficientes indeterminados $\{A_{(i)}, B_{(i)}, D_{(i)}\}$.

Comenzamos sustituyendo la solución (6.65) en el desarrollo de Chapman-Enskog a primer orden (6.52) y luego en el flujo de masa (6.24) para la especie (i) , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{J_{(i)m}}{m_{(i)}} &= -\frac{1}{3} \int f_{(i)}^{(0)} K_{(i)}^2 A_{(i)} dK_{(i)}^* \left[\frac{T_{,m}}{T}\right] \\ &\quad -\frac{1}{3} \int f_{(i)}^{(0)} K_{(i)}^2 B_{(i)} dK_{(i)}^* V_{(i)m} \\ &\quad -\frac{1}{3} \int f_{(i)}^{(0)} K_{(i)}^2 D_{(i)} dK_{(i)}^* d_m^{(i)}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Aquí definimos los coeficientes de transporte, que son las integrales que aparecen multiplicando a

cada fuerza termodinámica,

$$L_{dq(i)} \equiv \frac{1}{3} \int f_{(i)}^{(0)} K_{(i)}^2 A_{(i)} dK_{(i)}^*, \quad \text{flujo de masa debido a } T_{,m} \quad (6.67)$$

$$L_{dV(i)} \equiv \frac{1}{3} \int f_{(i)}^{(0)} K_{(i)}^2 B_{(i)} dK_{(i)}^*, \quad \text{flujo de masa debido a } V_{(i)m} \quad (6.68)$$

$$L_{dd(i)} \equiv \frac{1}{3} \int f_{(i)}^{(0)} K_{(i)}^2 D_{(i)} dK_{(i)}^*, \quad \text{flujo de masa debido a } d_m^{(i)} \quad (6.69)$$

De igual manera, para el flujo de calor por especie Ec. (6.41) tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{q_{(i)m}}{kT} \right) &= -\frac{1}{3z_{(i)}} \int f_{(i)}^{(0)} (\gamma_{k_{(i)}} - G_{(i)}) K_{(i)}^2 A_{(i)} dK_{(i)}^* \left[\frac{T_{,m}}{T} \right] \\ &\quad -\frac{1}{3z_{(i)}} \int f_{(i)}^{(0)} (\gamma_{k_{(i)}} - G_{(i)}) K_{(i)}^2 B_{(i)} dK_{(i)}^* V_{(i)m} \\ &\quad -\frac{1}{3z_{(i)}} \int f_{(i)}^{(0)} (\gamma_{k_{(i)}} - G_{(i)}) K_{(i)}^2 D_{(i)} dK_{(i)}^* d_m^{(i)}, \end{aligned} \quad (6.70)$$

donde definimos

$$L_{qq(i)} \equiv \frac{1}{3z_{(i)}} \int f_{(i)}^{(0)} (\gamma_{k_{(i)}} - G_{(i)}) K_{(i)}^2 A_{(i)} dK_{(i)}^*, \quad \text{flujo de calor debido a } T_{,m} \quad (6.71)$$

$$L_{qV(i)} \equiv \frac{1}{3z_{(i)}} \int f_{(i)}^{(0)} (\gamma_{k_{(i)}} - G_{(i)}) K_{(i)}^2 B_{(i)} dK_{(i)}^*, \quad \text{flujo de calor debido a } V_{(i)m} \quad (6.72)$$

$$L_{qd(i)} \equiv \frac{1}{3z_{(i)}} \int f_{(i)}^{(0)} (\gamma_{k_{(i)}} - G_{(i)}) K_{(i)}^2 D_{(i)} dK_{(i)}^*, \quad \text{flujo de calor debido a } d_m^{(i)} \quad (6.73)$$

respectivamente.

Si ahora reescribimos en una “matriz onsageriana” al flujo de masa (6.66) y de calor (6.70) tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{q_{(i)m}}{k_B T} \\ \frac{J_{(i)m}}{m_{(i)}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_{qq(i)} & L_{qd(i)} & L_{qV(i)} \\ L_{dq(i)} & L_{dd(i)} & L_{dV(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{T_{,m}}{T} \\ d_m^{(i)} \\ V_{(i)m} \end{pmatrix}. \quad (6.74)$$

La ecuación (6.74) tiene un serio problema, la matriz formada por las L 's no es cuadrada. Por lo no tanto no puede satisfacer la cuarta hipótesis de la TIL, que se refiere a que dicha matriz debe ser simétrica.

Para resolver este inconveniente, nos remitimos al flujo de volumen que hemos definido en la Ec. (6.46); sustituimos ahí la solución (6.65), para obtener que

$$\begin{aligned} J_{v(i)}^m &= -\frac{1}{3} \int f_{(i)}^{(0)} (\gamma_{k_{(i)}} - G(z_{(i)})) K_{(i)}^n K_{(i)n} A_{(i)} dK_{(i)}^* \frac{T_{,m}}{T} \\ &\quad -\frac{1}{3} \int f_{(i)}^{(0)} (\gamma_{k_{(i)}} - G(z_{(i)})) K_{(i)}^n K_{(i)n} B_{(i)} dK_{(i)}^* V_{(i)m}^m \\ &\quad -\frac{1}{3} \int f_{(i)}^{(0)} (\gamma_{k_{(i)}} - G(z_{(i)})) K_{(i)}^n K_{(i)n} D_{(i)} dK_{(i)}^* d^{(i)m}, \end{aligned} \quad (6.75)$$

donde definimos tres nuevos coeficientes de transporte como

$$L_{Vq(i)} \equiv \frac{1}{3} \int f_{(i)}^{(0)} \left(\gamma_{k(i)} - G_{(i)} \right) K_{(i)}^2 A_{(i)} dK_{(i)}^*, \quad \text{flujo de volumen debido a } T_{,m} \quad (6.76)$$

$$L_{VV(i)} \equiv \frac{1}{3} \int f_{(i)}^{(0)} \left(\gamma_{k(i)} - G_{(i)} \right) K_{(i)}^2 B_{(i)} dK_{(i)}^*, \quad \text{flujo de volumen debido a } V_{(i)m} \quad (6.77)$$

$$L_{Vd(i)} \equiv \frac{1}{3} \int f_{(i)}^{(0)} \left(\gamma_{k(i)} - G_{(i)} \right) K_{(i)}^2 D_{(i)} dK_{(i)}^*, \quad \text{flujo de volumen debido a } d^{(i)m}. \quad (6.78)$$

Ahora bien, al incorporar el flujo volumen (6.75) en la “matriz onsageriana” (6.74) tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{q^m}{k_B T} \\ \frac{J_n^m}{m(i)} \\ \frac{J_v^m}{v(i)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_{qq(i)} & L_{qd(i)} & L_{qV(i)} \\ L_{dq(i)} & L_{dd(i)} & L_{dV(i)} \\ L_{Vq(i)} & L_{Vd(i)} & L_{VV(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{T_{,m}}{T} \\ d_{(i)}^m \\ V_{(i)}^m \end{pmatrix}, \quad (6.79)$$

que es el resultado deseado, es decir que la matriz de las L 's sea cuadrada. Lo que sigue para mostrar que dicha matriz es simétrica es un proceso en esencia idéntico a aquel que se hace en el caso de la mezcla binaria clásica. Aquí vamos a demostrar la identidad $L_{dq(i)} = L_{qd(i)}$ y dejaremos las dos que faltan como ejercicio al lector. Tomemos la solución (6.65) y sustituyamos en la ecuación de Boltzmann linealizada (6.60), dada la estructura independiente de las tres fuerzas termodinámicas resultan tres ecuaciones diferenciales que son

$$f_{(i)}^{(0)} K_{(i)}^m \frac{1}{z_{(i)}} \left(\gamma_{k(i)} - G(z_{(i)}) \right) = [C(K_{(i)}^m A_{(i)}) + C(K_{(i)}^m A_{(i)} + K_{(j)}^m A_{(j)})], \quad (6.80)$$

para la parte calórica. Para la parte volumétrica,

$$f_{(i)}^{(0)} K_{(i)}^m \left(\gamma_{k(i)} - G(z_{(i)}) \right) = [C(K_{(i)}^m B_{(i)}) + C(K_{(i)}^m B_{(i)} + K_{(j)}^m B_{(j)})]. \quad (6.81)$$

Y por último la parte difusiva

$$f_{(i)}^{(0)} K_{(i)}^m = [C(K_{(i)}^m D_{(i)}) + C(K_{(i)}^m D_{(i)} + K_{(j)}^m D_{(j)})]. \quad (6.82)$$

Ahora multiplicamos la Ec. (6.80) por $K_{m(i)} D_{(i)}$ e integramos en $dK_{(i)}^*$, resulta

$$\begin{aligned} & \int f_{(i)}^{(0)} K_{(i)}^m \frac{1}{z_{(i)}} \left(\gamma_{k(i)} - G(z_{(i)}) \right) K_{m(i)} D_{(i)} dK_{(i)}^* \\ &= - \sum_j \int \dots \int f_{(i)}^{(0)} f_{(j)}^{(0)} \left[K_{(j)}^m A_{(j)}' + K_{(i)}^m A_{(i)}' - K_{(j)}^m A_{(j)} - K_{(i)}^m A_{(i)} \right] \times \\ & \quad K_{m(i)} D_{(i)} F_{(ij)} \sigma_{(ij)} d\Omega_{(j)} dK_{(j)}^* dK_{(i)}^* \equiv \{A, D\}. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Por otro lado, tomemos la Ec. (6.82), multipliquemos por $K_{m(i)} A_{(i)}$ e integramos en $dK_{(i)}^*$, resulta

$$\begin{aligned} & \int f_{(i)}^{(0)} K_{(i)}^m K_{m(i)} A_{(i)} dK_{(i)}^* \\ &= - \sum_j \int \dots \int f_{(i)}^{(0)} f_{(j)}^{(0)} \left[K_{(j)}^m D_{(j)}' + K_{(i)}^m D_{(i)}' - K_{(j)}^m D_{(j)} - K_{(i)}^m D_{(i)} \right] \times \\ & \quad K_{m(i)} A_{(i)} F_{(ij)} \sigma_{(ij)} d\Omega_{(j)} dK_{(j)}^* dK_{(i)}^* \equiv \{D, A\}. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Como el lector podrá notar, hemos definido los operadores $\{A, D\}$ y $\{D, A\}$. Al analizar sus contenidos, notamos que los integrandos satisfacen el principio de reversibilidad microscópica, vea la Ec. (6.7). Al hacer una serie de cambios presentes en la demostración del teorema H [29][30] en las Ecs. (6.83) y (6.84) se puede probar que

$$\{A, D\} = \{D, A\}. \quad (6.85)$$

Por otro lado, al ver el lado izquierdo de las ecuaciones (6.83) y (6.84) notamos que las integrales son precisamente las que definen a los coeficientes $L_{qd(i)}$ y $L_{dq(i)}$ respectivamente, por lo tanto

$$L_{dq(i)} = L_{qd(i)}. \quad (6.86)$$

Con un procedimiento similar, se puede demostrar que $L_{Vd(i)} = L_{dV(i)}$ y $L_{Vq(i)} = L_{qV(i)}$, pero no abordaremos los detalles aquí, queda como ejercicio para el lector interesado. Vale la pena decir que el hecho de que efectivamente la matriz de las L 's es simétrica obedece en el fondo al principio de reversibilidad microscópica. La simetría de dicha matriz es, parece, el último resquicio de la reversibilidad microscópica. Es la huella macroscópica del hecho que las ecuaciones de movimiento de las partículas sean reversibles.

La ecuación (6.79) está escrita por especie, pero al tomar la suma se genera otra matriz que contiene a los coeficientes de transporte, por ejemplo $L_{qq} = L_{qq(i)} + L_{qq(j)}$ representa la conductividad térmica que está asociada con la ecuación de Fourier. El coeficiente $L_{qd} = L_{qd(i)} + L_{qd(j)}$ obedece a un efecto de difusión térmica o efecto Dufour. Los coeficientes $L_{dq} = L_{dq(i)} + L_{dq(j)}$ y $L_{dd} = L_{dd(i)} + L_{dd(j)}$ son los efectos de termodifusión (Soret) y difusión de Fick respectivamente. Dada la estructura de las integrales, demostrar que la matriz de coeficientes de transporte es simétrica implica el mismo procedimiento que el que hemos usado anteriormente.

Es muy importante señalar que hay cinco coeficientes adicionales en la Ec. (6.79) cuyo significado físico es terreno inexplorado. Esos cinco coeficientes así como el flujo de volumen son una sorprendente novedad en la teoría cinética relativista.

6.5. Producción de entropía

Por último, y para poner punto final al paradigma que comprende a la Termodinámica Irreversible Lineal y a la Teoría Cinética Relativista, calcularemos la mal llamada producción de entropía que más bien está asociada al calor no compensado de Clausius, estos detalles también se pueden ver en la Ref [30].

Definamos un tetra-flujo S^μ que asociaremos después con la entropía local [6][30],

$$S^\mu \equiv -k_B \sum_{(i)} \int v_{(i)}^\mu f_{(i)} (\ln f_{(i)} - 1) dv_{(i)}^*. \quad (6.87)$$

A la Ec. (6.87) se le conoce como el tetra-flujo de entropía y obedece una ecuación de balance de la forma,

$$S^\mu_{,\mu} = \sigma \quad (6.88)$$

donde

$$\sigma = -k_B \sum_{(i),(j)} \int J(f_{(i)}f_{(j)}) \ln f_{(i)} dv_{(i)}^* \geq 0 \quad (6.89)$$

es lo que se conoce en la literatura como *producción de entropía* y $J(f_{(i)}f_{(j)})$ está definido en la ecuación (6.4).

Es muy importante subrayar que el identificar S^4 con la entropía local, S^m con el flujo de entropía y σ con el calor no compensado de Clausius no se puede hacer hasta que $f_{(i)}$ esté determinada. De hecho mientras $f_{(i)}$ sea desconocida, a ninguna de las cantidades anteriores se le puede asociar una variable termodinámica. También hay que notar que σ se le ha llamado desafortunadamente producción de entropía pues aparece como un término de producción en una ecuación de balance, pero el nombre es incorrecto. La entropía en su estatus de variable termodinámica no se puede producir.

Hay que notar que la ecuación (6.89) es válida para cualquier solución exacta de la ecuación de Boltzmann, y que no tiene significado físico hasta que se introduzca en ella una forma para $f_{(i)}$ que esté escrita en términos de variables termodinámicas.

Ahora bien, continuando con el análisis lineal, sustituimos el término de colisión de la ecuación de Boltzmann linealizada (6.55-6.56) en (6.89), obtenemos

$$\sigma = -k_B \sum_{(i),(j)} \int \cdots \int f_{(i)}^{(0)} f_{(j)}^{(0)} (\phi_{(i)}' + \phi_{(j)}' - \phi_{(i)} - \phi_{(j)}) \ln \left[f_{(i)}^{(0)} (1 + \phi_{(i)}) \right] F_{(ij)} \Sigma_{(ij)} d\Omega_{(ji)} dK_{(j)}^* dK_{(i)}^*. \quad (6.90)$$

Ahora, hacemos un desarrollo de $\ln \left[f_{(i)}^{(0)} (1 + \phi_{(i)}) \right]$ alrededor de $\phi_{(i)} = 1$,

$$\ln \left[f_{(i)}^{(0)} (1 + \phi_{(i)}) \right] \simeq \ln f_{(i)}^{(0)} + \phi_{(i)} + O(\phi_{(i)})^2, \quad (6.91)$$

de tal manera, σ se puede escribir como

$$\sigma = -k_B \sum_{(i),(j)} \int \cdots \int f_{(i)}^{(0)} f_{(j)}^{(0)} (\phi_{(i)}' + \phi_{(j)}' - \phi_{(i)} - \phi_{(j)}) (\ln f_{(i)}^{(0)} + \phi_{(i)}) F_{(ij)} \Sigma_{(ij)} d\Omega_{(ji)} dK_{(j)}^* dK_{(i)}^*. \quad (6.92)$$

Dado que $f_{(i)}^{(0)}$ así como $\ln f_{(i)}^{(0)}$ están dados en términos de los invariantes colisionales, la integral que contiene a $\ln f_{(i)}^{(0)}$ vale cero, tenemos que,

$$\sigma = -k_B \sum_{(i),(j)} \int \cdots \int f_{(i)}^{(0)} f_{(j)}^{(0)} (\phi_{(i)}' + \phi_{(j)}' - \phi_{(i)} - \phi_{(j)}) \phi_{(i)} F_{(ij)} \Sigma_{(ij)} d\Omega_{(ji)} dK_{(j)}^* dK_{(i)}^*, \quad (6.93)$$

que con la ayuda de la ecuación (6.55) y (6.56) se reduce a,

$$\sigma = -k_B \sum_{(i),(j)} \int [C(\phi_{(i)}) + C(\phi_{(i)}, \phi_{(j)})] \phi_{(i)} dK_{(i)}^*. \quad (6.94)$$

Finalmente sustituimos la Ec. (6.60) en (6.94), teniendo cuidado de incluir los términos tensoriales (asociados con $U_{;m}$). Esto no representa pérdida de generalidad pues σ es un invariante relativista, se obtiene que

$$\begin{aligned} \sigma = & -k_B \sum_{(i)} \int f_{(i)}^{(0)} \left[K_{(i)}^m \left\{ d_m^{(i)} + \frac{1}{z_{(i)}} (\gamma_{k_{(i)}} - G(z_{(i)})) \frac{T_{;m}}{T} - (\gamma_{k_{(i)}} - G(z_{(i)})) V_{(i)m} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{z_{(i)} c^2} \left(K_{(i)}^m \overset{\circ}{K}_{(i)n} \right) U_{;m}^n + \tau_{(i)} U_{;m}^m \right] \phi_{(i)} dK_{(i)}^*, \end{aligned} \quad (6.95)$$

donde $\tau_{(i)}$ es la traza de $K_{(i)}^m K_{(i)n}$ y $K_{(i)}^m \overset{\circ}{K}_{(i)n}$ es obviamente un tensor sin traza. Ahora bien, reescribamos la ecuación (6.95) como

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{-k_B} = & \sum_{(i)} \int K_{(i)}^m \phi_{(i)} d^3 K_{(i)}^* d_m^{(i)} + \sum_{(i)} \int K_{(i)}^m \frac{1}{z_{(i)}} (\gamma_{k_{(i)}} - G_{(i)}) \phi_{(i)} dK_{(i)}^* \frac{T_{;m}}{T} \\ & - \sum_{(i)} \int K_{(i)}^m (\gamma_{k_{(i)}} - G_{(i)}) \phi_{(i)} dK_{(i)}^* V_{(i)m} \\ & + \sum_{(i)} \int \frac{1}{z_{(i)} c^2} \left(K_{(i)}^m \overset{\circ}{K}_{(i)n} \right) \phi_{(i)} dK_{(i)}^* U_{;m}^n + \sum_{(i)} \int \tau_{(i)} \phi_{(i)} dK_{(i)}^* U_{;m}^m. \end{aligned} \quad (6.96)$$

En la ecuación (6.96) identificamos la forma bi-lineal: fuerzas por flujos. Veamos el primer término del lado derecho, el coeficiente que acompaña a la fuerza de difusión $d_m^{(i)}$ es,

$$\frac{J_{(i)}^m}{m_{(i)}} = \int K_{(i)}^m \phi_{(i)} dK_{(i)}^* \equiv J_{(i)}^{m*}. \quad (6.97)$$

En el segundo término del lado derecho de (6.96) vemos que multiplicando el gradiente de temperatura $\frac{T_{;m}}{T}$ tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{(i)} \int K_{(i)}^m \frac{1}{z_{(i)}} (\gamma_{k_{(i)}} - G_{(i)}) \phi_{(i)} dK_{(i)}^* &= \sum_{(i)} \left[\int K_{(i)}^m \frac{\gamma_{k_{(i)}}}{z_{(i)}} \phi_{(i)} dK_{(i)}^* - \frac{G_{(i)}}{z_{(i)}} \int K_{(i)}^m \phi_{(i)} dK_{(i)}^* \right] \\ &= \frac{1}{k_B T} \left(q^m - h_{(i)} \frac{J_{(i)}^m}{m_{(i)}} \right) \equiv q^{m*}, \end{aligned} \quad (6.98)$$

donde $h_{(i)} = \frac{k_B T}{z_{(i)}} G_{(i)}$ es la entalpía específica por especie y $G_{(i)}$ está definida en la ecuación (6.59). La forma del flujo de energía que aparece en q^{m*} como el flujo de calor y una contribución por entalpía de mezclado está plenamente justificada en los tratados fenomenológicos de la TIL (véase por ejemplo [16] ó [17]).

6.5. Producción de entropía

El coeficiente de transporte asociado a la nueva fuerza $V_{(i)m}$ es simple y llanamente la definición del flujo de volumen J_V^m , Ec. (6.47).

Si ahora sustituimos las definiciones de los flujos adimensionales $J_{(i)}^{m*}$ (6.97), q^{m*} (6.98) y J_V^m en (6.96), obtenemos

$$\frac{\sigma}{k_B} = -J^{m*} [d_m] - q^{m*} \left[\frac{T_{,m}}{T} \right] - J_V^m V_m - \frac{1}{k_B T} \pi_n^m U_{;m}^n - \tau U_{;m}^m. \quad (6.99)$$

Finalmente, en la ecuación (6.99) podemos identificar cuales son los flujos directos asociados a que fuerzas termodinámicas. El flujo difusivo masa es,

$$J^{m*} = \sum_{(i)} \frac{J_{(i)}^m}{m_{(i)}} = \sum_{(i)} \int K_{(i)}^m f_{(i)}^{(0)} \phi_{(i)} dK_{(i)}^*, \quad (6.100)$$

que es el efecto directo debido a la existencia de la fuerza de difusión d_m . El flujo de calor o flujo disipativo de energía

$$q^{m*} = \frac{1}{k_B T} \sum_{(i)} \left(q_{(i)}^m - h_{(i)} \frac{J_{(i)}^m}{m_{(i)}} \right) \quad (6.101)$$

es el efecto directo asociado con un gradiente de temperatura, donde

$$h_{(i)} = \frac{k_B T}{z_{(i)}} G_{(i)} \quad (6.102)$$

es la entalpía específica [7].

Por último, el flujo de volumen aparece como efecto directo de la fuerza termodinámica V_m , por lo que ahora le llamaremos *fuerza volumétrica*.

Por otro lado tenemos los flujos tensoriales, la viscosidad volumétrica

$$\pi_n^m = \sum_{(i)} \pi_{(i)n}^m = \sum_{(i)} \int (K_{(i)}^m K_{(i)n}^{\circ}) f_{(i)}^{(0)} \phi_{(i)} dK_{(i)}^* \quad (6.103)$$

y su traza es la viscosidad cortante

$$\tau = \sum_{(i)} \tau_{(i)} = \sum_{(i)} \int K_{(i)}^n K_{(i)n} f_{(i)}^{(0)} \phi_{(i)} dK_{(i)}^*. \quad (6.104)$$

Podemos concluir que la estructura que hemos hallado para σ cumple completamente con la forma canónica para la producción de entropía, es decir,

$$\sigma = \sum_i J_i \odot X_i, \quad (6.105)$$

donde \odot es la contracción a un escalar de un flujo J_i con su correspondiente fuerza X_i de acuerdo con el teorema de Curie. La ecuación (6.105) obtenida de primeros principios reafirma la segunda hipótesis de la Termodinámica Irreversible Lineal, es decir la validez de la extensión de la segunda ley de la termodinámica a procesos irreversibles.

Para finalizar nuestro análisis, podemos comentar que al hacer el límite al caso de un fluido simple, el flujo de volumen aparece como un múltiplo del flujo de calor. Esto se puede ver haciendo el límite de masas iguales $m_{(i)} = m_{(j)} = m$ y número de partículas $n_{(i)} = n_{(j)} = n$ también. Entonces el flujo de calor tiende a

$$\frac{q_{tot}^m}{k_B T} = \frac{mc^2}{k_B T} \int \gamma_k K^m f dK^*, \quad (6.106)$$

y el flujo de volumen

$$J_V^m = \int \gamma_k K^m f dK^*, \quad (6.107)$$

entonces

$$\frac{q_{tot}^m}{k_B T} = \frac{1}{z} J_V^m. \quad (6.108)$$

Esto también se puede visualizar si vemos las expresiones completas para los flujos, es decir una vez que se ha sustituido la forma para f . Primero notamos que en este límite la fuerza de difusión desaparece i.e. $d^m = 0$ y por otra parte el flujo de masa vale cero $J_{(i)}^m = J_{(j)}^m = 0$. Tenemos entonces que

$$J_V^m = -L_{Vq} \frac{T^m}{T} - L_{VV} \left[\frac{nm}{\tilde{\rho}} \frac{p^m}{p} \right], \quad (6.109)$$

y

$$\frac{q_{tot}^m}{k_B T} = -L_{qq} \frac{T^m}{T} - L_{qV} \left[\frac{nm}{\tilde{\rho}} \frac{p^m}{p} \right], \quad (6.110)$$

donde

$$L_{Vq} = -\frac{1}{3} \int f^{(0)} (\gamma_k - G(z)) K^n K_n A dK^*, \quad (6.111)$$

$$L_{VV} = -\frac{1}{3} \int f^{(0)} (\gamma_k - G(z)) K^n K_n B dK^*, \quad (6.112)$$

$$L_{qq} = -\frac{1}{3} \int f^{(0)} (\gamma_k - G(z)) K^n K_n A dK^*, \quad (6.113)$$

$$L_{qV} = -\frac{1}{3} \int f^{(0)} (\gamma_k - G(z)) K^n K_n B dK^*. \quad (6.114)$$

Aquí nuevamente vemos que

$$\frac{q_{tot}^m}{k_B T} = \frac{1}{z} J_V^m, \quad (6.115)$$

Por lo que en el límite a fluido simple, el flujo de volumen tiende a ser un múltiplo del flujo de calor.

La Ec.(6.115) muestra claramente que el origen del término $\frac{n\mu}{n}$ en el caso de un fluido simple es de origen netamente relativista. Surge de reducir la mezcla binaria al caso de un fluido simple. A su vez esto conduce a un problema no resuelto. ¿Cómo puede justificarse su existencia de bases estrictamente fenomenológicas? Aún en las versiones conocidas de la TIL en el marco de la teoría especial de la relatividad este problema nunca ha sido tocado.

Por último, es necesario subrayar que los nuevos coeficientes de transporte que aparecen en la Ec. (6.79) requieren, conjuntamente con los nuevos efectos cruzados que implican, una interpretación física clara. Este problema así como la evaluación de todos los coeficientes de transporte característicos de la mezcla, para modelos microscópicos está pendiente aunque hoy algún progreso se ha realizado en su evaluación [9].

Agradecimientos

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT, México) por su apoyo brindado a través del proyecto número 167563.

Bibliografía

- [1] F. Jüttner; *Ann. Physik und Chemie* **34**, 856 (1911).
- [2] A. Lichnerowicz, R. Marrot; *Propriétés statistiques des ensembles de particules en relativité*. *Compt. Rend. Acad. Sc (Paris)* **210**, 759 (1940).
- [3] R. Marrot, *J. Math. Pures et Appl.* **25**, 93, (1946).
- [4] A. H. Taub. *Phys. Rev.* **74**, 328, (1948).
- [5] W. Israel; *Relativistic Kinetic Theory of a Simple Gas*, *J. Math. Phys.* **4**, 1163 (1963).
- [6] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen, Ch. G. van Weert; *Relativistic Kinetic Theory*, North-Holland (1980).
- [7] C. Cercignani, G. M. Kremer; *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*, Birkhauser Verlag (2002).
- [8] A. L. García-Perciante, A. Sandoval Villalbazo y L. S. García-Colín, *J. Non-Equilib. Thermodyn.* **37**, 43 (2012).
- [9] A. L. García-Perciante y A. R. Méndez, *Gen. Relativ. Gravit.* **43**, 2257-2275, (2011).
- [10] A. Sandoval Villalbazo y L. S. García-Colín *Physica A* **238**, 428 (2000).
- [11] A. S. Eddington, *The mathematical theory of relativity*; Cambridge University Press (1930).

-
- [12] A. L. García-Perciante, L. S. García-Colín y A. Sandoval Villalbazo. *Gen. Relativ. Gravit.* **41**, 1645-1654, (2009).
- [13] A. Sandoval-Villalbazo, A.L. García-Perciante, L.S. García-Colín, *Phys. A.* **388**, 3765-3770 (2009).
- [14] C. Eckart; *The Thermodynamics of Irreversible Processes. I, II y III*, *J. Phys. Rev.* **58**, 919 (1940).
- [15] S. Chapman y T.G. Cowling; *The mathematical theory of non uniform Gases*, 3 Ed, Cambridge University Press (1970).
- [16] L. S. García-Colín y P. Goldstein; *La Física de los Procesos Irreversibles*, Tomo 1, 3 Ed, El colegio Nacional, México (2003).
- [17] S. R. de Groot y P. Mazur; *Non-Equilibrium Thermodynamics*, Dover, (1984).
- [18] P. Goldstein y L.S. García-Colín. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* **30**, 173-186, (2005).
- [19] G. Chacón, L. Dagdug, H. A. Morales-Técotl; *Phys Rev* **E81**, 021126 (2010).
- [20] R. Courant., D. Hilbert., *Methods of Mathematical Physics, Vol. 1*, Interscience Publishers (1953).
- [21] T. Carleman, *Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz.* (Publications Scientifiques de l'Institut mi Hag-Leffler, Vol. 2; Upsala, 1957).
- [22] A. L. García-Perciante, A. Sandoval Villalbazo y L. S. García-Colín, *Physica A* **387** 5073-5079 (2008).
- [23] L. S. García-Colín y A. Sandoval Villalbazo, *J. Non-Equilib. Thermodyn.* **31**, 11 (2006).
- [24] A.L. García-Perciante, L.S. García-Colín, Alfredo Sandoval-Villalbazo, *Gen. Relativ. Gravit.* **41**, 1645-1654, (2009).
- [25] S. R. de Groot, C. G. van Weert, W. Th. Hermens and W. A. van Leeuwen. *Physica.* **40**, 257, (1968).
- [26] W. Th. Hermens, W. A. van Leeuwen, S. R. de Groot, Ch. G. van Weert and S. R. de Groot. *Physica.* **60**, 472, (1972).
- [27] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*; John Wiliey & Sons (1972).
- [28] V. Moratto, A. L. García-Perciante, L. S. García-Colín, *AIP Conf. Proc.* **1312**, 80-88. (2010).
- [29] V. Moratto, A. L. García-Perciante, L. S. García-Colín, *Phys. Rev. E* **84**, 021132 (2011).
- [30] V. Moratto, A. L. García-Perciante y L. S. García-Colín, *J. Non-Equilib. Thermodyn.* **37**, 179-197 (2012).

Las leyes de Ohm y de Fourier relativistas para mezclas binarias de electrones con protones y fotones

Gilberto M. Kremer

Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil.

`kremer@fisica.ufpr.br`

Resumen

Usando la ecuación modelo de Anderson y Witting, se analizan mezclas binarias de electrones con protones y de electrones con fotones sometidas a campos electromagnéticos externos. Se determinan las leyes de Ohm y de Fourier relativistas, así como las expresiones generales de las conductividades eléctricas y térmicas relativistas para mezclas de gases ionizados. Se dan las expresiones explícitas para los coeficientes de transporte, para los casos particulares: una mezcla no-relativista de protones y electrones no degenerados; una mezcla ultra-relativista de fotones y electrones no degenerados, una mezcla no-relativista de protones y electrones completamente degenerados, una mezcla ultra-relativista de fotones y electrones completamente degenerados y una mezcla de protones no-relativistas y electrones ultra-relativistas completamente degenerados.

7.1. Introducción

El análisis de los gases ionizados no relativistas y relativistas mediante el uso de la ecuación de Boltzmann es un tema muy complejo, ya que hace referencia a un sistema de ecuaciones acopladas no lineales integro-diferenciales para la función de distribución. En la literatura se han propuesto ecuaciones modelo más simples para el término de colisión con el fin de superar las dificultades de la ecuación integro-diferencial de Boltzmann. Estas ecuaciones modelo simplifican la estructura del término de colisión pero mantienen sus propiedades básicas. Para la ecuación de Boltzmann no relativista el modelo más conocido es el modelo BGK que fue formulado independientemente por Bhatnagar, Gross y Krook [1] y por Welander [2]. La primera extensión del modelo BGK no relativista al caso relativista fue propuesto por Marle [3]. Aunque en el caso límite no relativista del modelo de Marle se recupera el modelo BGK no relativista, para el caso de partículas con masa en reposo cero, el tiempo de relajación de la función de distribución tiende a infinito. Esta deficiencia fue encontrada por Anderson y Witting [4] quienes propusieron una nueva ecuación modelo.

En este trabajo seguimos [5] y analizamos mezclas binarias de electrones y protones y de electrones y fotones sujetos a campos electromagnéticos externos en el marco de la ecuación modelo de Anderson y Witting. Estos dos sistemas son importantes en astrofísica, ya que podrían describir las enanas blancas magnéticas o líquidos cosmológicos en el período del plasma y en el período dominado por radiación. Mediante el uso de la metodología de Chapman-Enskog determinamos las leyes de Ohm y de Fourier en presencia de campos electromagnéticos y las expresiones generales de las conductividades eléctricas y térmicas para mezclas binarias relativistas no degeneradas y degeneradas de electrones con protones y electrones con fotones. Además, damos expresiones explícitas para estos coeficientes para las mezclas particulares: (a) una mezcla no relativista de protones y electrones no degenerados; (b) una mezcla ultra-relativista de fotones y electrones no degenerados; (c) una mezcla no relativista de protones y electrones completamente degenerados; (d) una mezcla ultra-relativista de fotones y electrones completamente degenerados y (e) una mezcla de protones no relativistas y electrones ultra-relativistas completamente degenerados.

7.2. Ecuación relativista de Uehling-Uhlenbeck

Consideremos primero un gas ideal cuántico simple en un espacio de Minkowski caracterizado por el tensor métrico $\eta^{\alpha\beta}$ con signatura $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$. En el espacio de fase generado por las coordenadas espacio-tiempo $(x^\alpha) = (ct, x^\alpha)$ y cuatro-vector de momento $(p^\alpha) = (p^0, \mathbf{p})$ el estado de un gas cuántico relativista está caracterizado por la función de distribución de una partícula $f(x^\alpha, p^\alpha) \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, puesto que la longitud del cuatro-vector de momento está dado por mc tal que $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2}$. El número de partículas al tiempo t en el elemento de volumen d^3x alrededor de \mathbf{x} está dado por $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3x d^3p$.

La evolución en el espacio-tiempo de la función de distribución de una partícula $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \equiv f$ en el espacio fase está dada por la ecuación de Boltzmann (véase, por ejemplo [6, 7])

$$p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + m \frac{\partial f K^\alpha}{\partial p^\alpha} = Q, \quad (7.1)$$

donde m denota la masa en reposo de la partícula y K^α es la fuerza de Minkowski la cual actúa sobre las partículas del gas. Además, \mathcal{Q} es un término que toma en cuenta las colisiones de las partículas. Para un gas relativista que obedece la mecánica estadística clásica este término está dado por

$$\mathcal{Q} = \int (f'_* f' - f_* f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_*}{p_{*0}}. \quad (7.2)$$

En la ecuación anterior, hemos introducido las abreviaturas $f'_* \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{p}'_*, t)$, $f' \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{p}', t)$, $f_* \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{p}_*, t)$, $f \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, donde \mathbf{p} y \mathbf{p}_* denotan los momentos de dos partículas antes de la colisión binaria y \mathbf{p}' y \mathbf{p}'_* son los correspondientes momentos después de la colisión. Los cuatro-vectores de momento pre y post colisionales están relacionados por la ley de conservación de la energía-momento $p^\alpha + p_*^\alpha = p'^\alpha + p_*'^\alpha$. Además, $F = \sqrt{(p_*^\alpha p_\alpha)^2 - m^4 c^4}$ es el flujo invariante, que en el límite no relativista es proporcional al módulo de la velocidad relativa. La sección transversal diferencial y el elemento de ángulo sólido que caracterizan la colisión binaria están denotados por σ y $d\Omega$, respectivamente.

El término de colisión \mathcal{Q} para un gas cuyas partículas obedecen a la estadística cuántica puede motivarse de la siguiente manera. En primer lugar notemos que el elemento de volumen en el espacio de fase $d^3 x d^3 p$ es un escalar invariante, pero cuando los efectos cuánticos se toman en cuenta en una descripción semi-clásica, dividimos el elemento de volumen por h^3 , donde $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J s es la constante de Planck. Por lo tanto podemos escribir $d^3 x d^3 p / h^3$, que también es un escalar invariante. El término $d^3 x d^3 p / h^3$ puede interpretarse como el número de estados disponibles en el elemento de volumen $d^3 x d^3 p$. Para partículas con espín s hay más estados, que corresponden a los valores que las componentes del espín puede tomar en un eje dado y tenemos que introducir el factor de degeneración g_s . Por lo tanto el número de estados disponibles está dado por

$$g_s \frac{d^3 x d^3 p}{h^3} \quad \text{donde} \quad g_s = \begin{cases} 2s + 1 & \text{para } m \neq 0; \\ 2s & \text{para } m = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

En mecánica cuántica, un sistema de partículas idénticas puede ser descrito por dos tipos de partículas: bosones y fermiones. Los bosones tienen espín entero, obedecen la estadística de Bose-Einstein e incluyen mesones (piones, kaones), fotones, gluones y los núcleos de número de masa par como el helio-4. Los fermiones tienen spin semientero, obedecen a la estadística de Fermi-Dirac e incluye a los leptones (electrón, muón, tau), los bariones (neutrones, protones) y los núcleos de número de masa impar como el helio-3. La diferencia principal entre los bosones y fermiones en la mecánica estadística cuántica se refiere al número de ocupación de un estado. Cualquier número de bosones pueden ocupar el mismo estado, mientras que los fermiones obedecen el principio de exclusión de Pauli y un máximo de una partícula puede ocupar cada estado.

Con el fin de incorporar las estadísticas de bosones y fermiones en el término de colisión, comenzamos por analizar a los fermiones y teniendo en cuenta que, debido al principio de exclusión de Pauli, el espacio de fases está totalmente ocupado si el número de las partículas en $d^3 x d^3 p$ es igual al número de estados disponibles $f d^3 x d^3 p = g_s d^3 x d^3 p / h^3$, de modo que $f = g_s / h^3$. Por lo tanto, $(1 - fh^3/g_s)$ da el número de estados vacantes en el espacio de fase. Si el número de partículas que entran en el elemento de volumen $d^3 x d^3 p$ en el espacio de fase, como consecuencia de una

colisión binaria, es proporcional a $f'f'_*$ esta cantidad debe ser multiplicado por el número de estados vacantes que es proporcional a $(1 - fh^3/g_s)(1 - f_*h^3/g_s)$. Por lo tanto, debe considerarse la siguiente sustitución en el término de colisión de la ecuación de Boltzmann:

$$f'f'_* \mapsto f'f'_* \left(1 - \frac{fh^3}{g_s}\right) \left(1 - \frac{f_*h^3}{g_s}\right). \quad (7.4)$$

Sobre la base del mismo razonamiento tenemos que sustituir

$$ff_* \mapsto ff_* \left(1 - \frac{f'h^3}{g_s}\right) \left(1 - \frac{f'_*h^3}{g_s}\right), \quad (7.5)$$

para partículas que dejan el elemento de volumen $d^3x d^3p$ en el espacio fase.

Para incluir la atracción aparente entre las partículas bosonicas – debido a las estadísticas de partículas indistinguibles sin restricciones en la ocupación de un estado – el factor $(1 - fh^3/g_s)$ debe ser reemplazado por $(1 + fh^3/g_s)$. Por tanto, podemos escribir de ecuación de Boltzmann (7.1) y de las conclusiones anteriores, la ecuación relativista de Uehling-Uhlenbeck (para la ecuación no-relativista de Uehling-Uhlenbeck ver [8])

$$\begin{aligned} p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + m \frac{\partial f K^\alpha}{\partial p^\alpha} &= \int \left[f'_* f' \left(1 + \varepsilon \frac{fh^3}{g_s}\right) \left(1 + \varepsilon \frac{f_*h^3}{g_s}\right) \right. \\ &\left. - f_* f \left(1 + \varepsilon \frac{f'h^3}{g_s}\right) \left(1 + \varepsilon \frac{f'_*h^3}{g_s}\right) \right] F \sigma d\Omega \frac{d^3p_*}{p_{*0}}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

donde ε se define a través de

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{para la estadística de Bose-Einstein;} \\ -1 & \text{para la estadística de Fermi-Dirac;} \\ 0 & \text{para la estadística de Maxwell-Boltzmann.} \end{cases} \quad (7.7)$$

En el equilibrio, el número de partículas que entran y salen del elemento de volumen en el espacio fase debe ser igual el uno del otro, de modo que la cantidad dentro de los corchetes en (7.6) debe desaparecer. De manera equivalente, $\ln [f^{(0)}/(1 + \varepsilon f^{(0)}h^3/g_s)]$ debe ser un invariante de suma (o sumacional) –es decir, una función que obedece la relación $\psi + \psi_* = \psi' + \psi'_*$ – donde $f^{(0)}$ denota la función de distribución del equilibrio. Para invariantes sumacionales existe el siguiente teorema (véase, por ejemplo [7]): Una función continua y diferenciable de clase C^2 $\psi(p^\alpha)$ es un invariante sumacional si y sólo si está dada por $\psi(p^\alpha) = A + B_\alpha p^\alpha$, donde A es un escalar arbitrario y B_α es un cuatro-vector arbitrario que no dependen de p^α . Por lo tanto tenemos

$$\ln \left(\frac{f^{(0)}}{1 + \varepsilon f^{(0)}h^3/g_s} \right) = -(A + B_\alpha p^\alpha), \quad \text{or} \quad f^{(0)} = \frac{g_s/h^3}{e^{-a+B^\alpha p_\alpha} - \varepsilon}, \quad (7.8)$$

donde $a = -A - \ln(g_s/h^3)$.

Para la determinación de a y B^α nos referimos a [7]. Aquí damos sólo los resultados que $a = \mu/kT$ y $B^\alpha = U^\alpha/kT$, donde μ es el potencial químico, T es la temperatura, k es la constante de Boltzmann, y U^α la cuatro-velocidad (con $U^\alpha U_\alpha = c^2$). Por lo tanto, la función de distribución de equilibrio se escribe

$$f^{(0)} = \frac{g_s}{h^3} e^{\frac{\mu}{kT} - \frac{U^\alpha p_\alpha}{kT}}, \quad f^{(0)} = \frac{g_s/h^3}{e^{-\frac{\mu}{kT} + \frac{U^\alpha p_\alpha}{kT}} \pm 1}, \quad (7.9)$$

cuando $\epsilon = 0$ y $\epsilon = \mp 1$, respectivamente. Las función de distribución relativista de Maxwell-Boltzmann distribution (7.9)₁ fue obtenida por Jüttner [9] en 1911 y las funciones de distribución relativistas de Fermi-Dirac (+) y de Bose-Einstein (-) (7.9)₁ fueron deducidas por él mismo [10] en 1928.

La extensión de la ecuación de Uehling-Uhlenbeck para una mezcla de r constituyentes es directa. Introducimos la función de distribución de una partícula para cada componente de la mezcla $f_a \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{p}_a, t)$ ($a = 1, \dots, r$) que debe cumplir la ecuación

$$\begin{aligned} p_a^\alpha \frac{\partial f_a}{\partial x^\alpha} + \frac{q_a}{c} F^{\alpha\beta} p_{a\beta} \frac{\partial f_a}{\partial p_a^\alpha} = \sum_{b=1}^r \int \left[f_b' f_a' \left(1 + \varepsilon_a \frac{f_a h^3}{g_a} \right) \left(1 + \varepsilon_b \frac{f_b h^3}{g_b} \right) \right. \\ \left. - f_b f_a \left(1 + \varepsilon_a \frac{f_a' h^3}{g_a} \right) \left(1 + \varepsilon_b \frac{f_b' h^3}{g_b} \right) \right] F_{ba} \sigma_{ab} d\Omega_{ba} \frac{d^3 p_b}{p_{b0}}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Arriba se supuso que la fuerza externa que actúa sobre las partículas de carga eléctrica q_a es de naturaleza electromagnética. En este caso la fuerza de Minkowski es

$$K_a^\alpha = \frac{q_a}{c} F^{\alpha\beta} \frac{p_{a\beta}}{m_a}, \quad (7.11)$$

donde $F^{\alpha\beta}$ es el tensor de campo electromagnético.

Ahora introducimos los momentos de la función de distribución, que son los cuatro-flujos parciales de partículas N_a^α y el tensor de energía-momento parcial. Éstos se definen a través:

$$N_a^\alpha = c \int p_a^\alpha f_a \frac{d^3 p_a}{p_{a0}}, \quad T_a^{\alpha\beta} = c \int p_a^\alpha p_a^\beta f_a \frac{d^3 p_a}{p_{a0}}. \quad (7.12)$$

Las cantidades correspondientes para mezclas son

$$N^\alpha = \sum_{a=1}^r N_a^\alpha, \quad T^{\alpha\beta} = \sum_{a=1}^r T_a^{\alpha\beta}. \quad (7.13)$$

En el análisis de los gases ionizados también es importante introducir el cuatro-vector de carga eléctrica J^α , que se define en términos de los cuatro-flujos parciales de partículas N_a^α y de las cargas eléctricas parciales q_a , como

$$J^\alpha = \sum_{a=1}^r q_a N_a^\alpha. \quad (7.14)$$

Las ecuaciones de balance para el cuatro-flujo de partículas y para el tensor de energía-momento de la mezcla se obtienen multiplicando (7.10) por c y cp_a^α , respectivamente, y sumando las ecuaciones resultantes, produciendo

$$\partial_\alpha N^\alpha = 0, \quad \partial_\beta T^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} F^{\alpha\beta} \sum_{a=1}^r q_a N_{a\beta} = \frac{1}{c} F^{\alpha\beta} J_\beta. \quad (7.15)$$

La ecuación (7.15)₁ es la ley de conservación del cuatro-flujo de partículas de la mezcla. La ecuación (7.15)₂, cuando se compara con la ecuación de balance para el tensor energía-momento del campo electromagnético $T_{em}^{\alpha\beta}$ tiene un signo contrario del lado derecho. Sin embargo, si se denota el tensor de energía-momento de (7.15)₂ por un índice pt – que se refiere a las partículas – obtenemos la ley de conservación (see Landau and Lifshitz [11]):

$$\partial_\alpha (T_{pt}^{\alpha\beta} + T_{em}^{\alpha\beta}) = 0, \quad (7.16)$$

lo que significa que la suma de los tensores de energía-momento de las partículas y del campo electromagnético satisfacen una ecuación de conservación.

7.3. Descomposición de Landau-Lifshitz

La descomposición del cuatro-flujo parcial de partículas y del tensor parcial de energía-momento procede mediante la introducción de la cuatro-velocidad U^α y el proyector $\Delta^{\alpha\beta}$ definido por

$$\Delta^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{c^2} U^\alpha U^\beta, \quad \text{tal que} \quad \Delta^{\alpha\beta} U_\beta = 0. \quad (7.17)$$

En la descripción de Landau-Lifshitz [12] el cuatro-flujo parcial de partículas y el tensor de energía-momento parcial pueden descomponerse de acuerdo con

$$N_a^\alpha = n_a U^\alpha + J_a^\alpha - \frac{n_a q_a^\alpha}{nh}, \quad (7.18)$$

$$T_a^{\alpha\beta} = p_a^{(\alpha\beta)} - (p_a + \varpi_a) \Delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} U^\alpha \left(q_a^\beta + h_a J_a^\beta - \frac{n_a h_a}{nh} q^\beta \right) + \frac{1}{c^2} U^\beta \left(q_a^\alpha + h_a J_a^\alpha - \frac{n_a h_a}{nh} q^\alpha \right) + \frac{e_a n_a}{c^2} U^\alpha U^\beta. \quad (7.19)$$

Arriba hemos introducido las siguientes cantidades para la componente a de la mezcla: densidad de número de partículas n_a , flujo difusivo J_a^α , desviador de la presión $p_a^{(\alpha\beta)}$, la presión p_a , la presión fuera de equilibrio ϖ_a , el flujo de calor q_a^α , la energía por partícula e_a y la entalpía por partícula $h_a = e_a + p_a/n_a$. Las cantidades correspondientes para la mezcla están dadas en términos de sumas

$$n = \sum_{a=1}^r n_a, \quad p^{(\alpha\beta)} = \sum_{a=1}^r p_a^{(\alpha\beta)}, \quad p = \sum_{a=1}^r p_a, \quad \varpi = \sum_{a=1}^r \varpi_a, \quad (7.20)$$

$$ne = \sum_{a=1}^r n_a e_a, \quad q^\alpha = \sum_{a=1}^r (q_a^\alpha + h_a J_a^\alpha), \quad nh = \sum_{a=1}^r n_a h_a. \quad (7.21)$$

La suma de (7.18) y (7.19) sobre todos los constituyentes de la mezcla llevan a las siguientes descomposiciones del cuatro-flujo de partículas y del tensor de energía-momento de la mezcla

$$N^\alpha = nU^\alpha - \frac{q^\alpha}{h}, \quad T^{\alpha\beta} = p^{(\alpha\beta)} - (p + \varpi)\Delta^{\alpha\beta} + \frac{en}{c^2}U^\alpha U^\beta, \quad (7.22)$$

gracias a la restricción de que sólo existen $(r - 1)$ flujos de difusión parciales que son linealmente independientes para una mezcla de r constituyentes, a saber,

$$\sum_{a=1}^r J_a^\alpha = 0. \quad (7.23)$$

También podemos definir el cuadvivector de corriente eléctrica I^α en términos de los flujos de difusión parciales J_a^α y de las cargas eléctricas parciales q_a , como

$$I^\alpha = \sum_{a=1}^r q_a J_a^\alpha. \quad (7.24)$$

Nos referimos a los trabajos de de Groot y Suttrop [13] y de van Erkelens y van Leeuwen [14] y descomponemos el tensor de campo electromagnético $F^{\alpha\beta}$ en una parte que es paralela a la cuatro-velocidad U^α y otra que es perpendicular a ella, es decir,

$$F^{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2} (F^{\alpha\gamma} U_\gamma U^\beta - F^{\beta\gamma} U_\gamma U^\alpha) + \Delta_\gamma^\alpha F^{\gamma\delta} \Delta_\delta^\beta. \quad (7.25)$$

Además, introduciendo los tensores E^α y $B^{\alpha\beta}$ definidos por

$$E^\alpha = \frac{1}{c} F^{\alpha\beta} U_\beta, \quad B^{\alpha\beta} = -\Delta_\gamma^\alpha F^{\gamma\delta} \Delta_\delta^\beta, \quad (7.26)$$

podemos escribir el tensor de campo electromagnético como

$$F^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} (E^\alpha U^\beta - E^\beta U^\alpha) - B^{\alpha\beta}. \quad (7.27)$$

Si consideramos un marco local de Lorentz en reposo donde $(U^\alpha) = (c, \mathbf{0})$, las ecuaciones (7.26) implican que

$$(E^\alpha) = (0, \mathbf{E}), \quad B^{0\alpha} = B^{\alpha 0} = 0, \quad B^{ij} = -c\epsilon^{ijk} B_k, \quad (7.28)$$

y podemos identificar E^α con el campo eléctrico \mathbf{E} y $B^{\alpha\beta}$ con la inducción de flujo magnético \mathbf{B} . Debido al hecho de que $F^{\alpha\beta}$ es un tensor antisimétrico $F_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 0$, se siguen de (7.26) y (7.27) las relaciones

$$E_\alpha U^\alpha = 0, \quad B_{\alpha\beta} U^\beta = 0, \quad \text{y} \quad B^{\alpha\beta} = -B^{\beta\alpha}. \quad (7.29)$$

7.4. Método de Chapman-Enskog

Dado que estamos interesados en derivar las leyes de Ohm y de Fourier para una mezcla binaria de electrones y protones y de electrones y fotones, tenemos que hacer algunas simplificaciones a nuestro modelo, las cuales se enumeran a continuación:

1. el cuadvivector de corriente eléctrica (7.24) para una mezcla binaria de electrones ($a = e$) y protones ($a = p$) puede ser escrito como

$$I^\alpha = -2eJ_e^\alpha, \quad (7.30)$$

dado que la relación entre los flujos de difusión es $J_e^\alpha = -J_p^\alpha$ y que las cargas eléctricas están dadas por $q_e = -e$, $q_p = e$, donde e denota la carga elemental. Por otra parte, se analizará el llamado plasma Lorentziano [15] donde las colisiones entre los electrones pueden despreciarse en comparación con las colisiones entre los electrones y protones. Un plasma Lorentziano debe cumplir la condición de que la masa de un constituyente sea mucho mayor que la masa del otro constituyente. Aquí tenemos que $m_p/m_e \approx 1836$, donde m_e y m_p denotan las masas del electrón y del protón respectivamente. Además, supondremos un sistema localmente neutral donde $q_e n_e + q_p n_p = 0$, que implica que $n_e = n_p$;

2. el cuadvivector de corriente eléctrica (7.24) para una mezcla binaria de electrones ($a = e$) y fotones ($a = \gamma$), se reduce a

$$I^\alpha = -eJ_e^\alpha, \quad (7.31)$$

dado al hecho de que la carga eléctrica de los fotones es cero ($q_\gamma = 0$). Además, las colisiones entre electrones también se puede despreciarse en comparación con las colisiones entre electrones y fotones, que es la dispersión de Compton;

3. los flujos de calor parciales de los protones y de los fotones son insignificantes en comparación con el flujo de calor parcial de los electrones, de modo que se puede escribir a partir de (7.21)₂ que el flujo de calor de la mezcla se reduce a

$$q^\alpha = q_e^\alpha + (h_e - h_b)J_e^\alpha, \quad \text{con} \quad b = p, \gamma. \quad (7.32)$$

Por simplicidad vamos a adoptar la ecuación modelo de Anderson y Witting [4] para los electrones en lugar de utilizar la ecuación de Uehling-Uhlenbeck relativista (7.10). Por lo tanto, teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, escribimos la evolución espacio-temporal de la función de distribución de los electrones como

$$p_e^\alpha \frac{\partial f_e}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c} F^{\alpha\beta} p_{e\beta} \frac{\partial f_e}{\partial p^\alpha} = -\frac{U^\alpha p_{e\alpha}}{c^2 \tau_{eb}} (f_e - f_e^{(0)}), \quad (7.33)$$

donde τ_{eb} con $b = p$ o $b = \gamma$ es el tiempo libre medio entre colisiones de electrones-protones o electrones fotones, respectivamente. En la ecuación anterior $f_e^{(0)}$ es la función de distribución de equilibrio de los electrones

$$f_e^{(0)} = \frac{2}{h^3} \frac{1}{\exp\left(-\frac{\mu_e}{kT} + \frac{U^\alpha p_{e\alpha}}{kT}\right) + 1}, \quad (7.34)$$

al considerar que los electrones obedecen a la estadística de Fermi-Dirac. Arriba, T denota la temperatura de la mezcla, μ_e el potencial químico de los electrones y el factor 2 se refiere al factor de degeneración de los electrones.

Una vez que se conoce la función de distribución de equilibrio de los electrones es posible calcular los valores de los campos en el equilibrio: la densidad del número de partículas n_e , la densidad de energía $n_e e_e$ y la presión p_e definidas por

$$n_e = \frac{1}{c^2} U_\alpha N_e^\alpha = \frac{1}{c^2} U_\alpha c \int p_e^\alpha f_e^{(0)} \frac{d^3 p_e}{p_{e0}}, \quad (7.35)$$

$$n_e e_e = \frac{1}{c^2} U_\alpha U_\beta T_e^{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2} U_\alpha U_\beta c \int p_e^\alpha p_e^\beta f_e^{(0)} \frac{d^3 p_e}{p_{e0}}, \quad (7.36)$$

$$p_e = -\frac{1}{3} \Delta_{\alpha\beta} T_e^{\alpha\beta} = -\frac{1}{3} \Delta_{\alpha\beta} c \int p_e^\alpha p_e^\beta f_e^{(0)} \frac{d^3 p_e}{p_{e0}}. \quad (7.37)$$

El cálculo se realiza como sigue: consideramos un sistema de Lorentz localmente en reposo donde $U^\alpha = (c, \mathbf{0})$ de manera que la densidad numérica de partículas de los electrones (7.35) se reduce a

$$n_e = \int \frac{2}{h^3} \frac{1}{\exp\left(-\frac{\mu_e}{kT} + \frac{c p_{e0}}{kT}\right) + 1} |\mathbf{p}_e|^2 \sin \psi d\chi d\psi d|\mathbf{p}_e|, \quad (7.38)$$

donde hemos introducido las coordenadas esféricas $0 \leq \psi \leq \pi$, $0 \leq \chi \leq 2\pi$ y $0 \leq |\mathbf{p}_e| < \infty$. Ahora, cambiamos la variable de integración mediante la introducción de una nueva variable ϑ definida a través de

$$|\mathbf{p}_e| = m_e c \sinh \vartheta, \quad \text{tal que} \quad \frac{c p_{e0}}{kT} = \zeta_e \cosh \vartheta, \quad (7.39)$$

donde $\zeta_e = m_e c^2 / kT$ es el cociente entre la masa en reposo del electrón $m_e c^2$ y la energía térmica del gas kT . Cuando $\zeta_e \gg 1$ el gas de electrones se comporta como un gas no relativista, mientras que $\zeta_e \ll 1$ se comporta como un gas ultra-relativista. El cambio de variables y la integración de (7.38) en los ángulos χ y ψ conduce a

$$n_e = 8\pi \left(\frac{m_e c}{h}\right)^3 \int_0^\infty \frac{\sinh^2 \vartheta \cosh \vartheta d\vartheta}{\exp(-\mu_e^* + \zeta_e \cosh \vartheta) + 1} = \frac{8\pi}{h^3} (m_e c)^3 \mathcal{J}_{21}(\zeta_e, \mu_e^*). \quad (7.40)$$

En la ecuación anterior, hemos introducido el potencial químico de electrones $\mu_e^* = \mu_e / kT$ en unidades de kT y la integral $\mathcal{J}_{nm}(\zeta_e, \mu_e^*)$ definida por

$$\mathcal{J}_{nm}(\zeta_e, \mu_e^*) = \int_0^\infty \frac{\sinh^n \vartheta \cosh^m \vartheta d\vartheta}{\exp(-\mu_e^* + \zeta_e \cosh \vartheta) + 1}. \quad (7.41)$$

Si siguiendo la misma metodología obtenemos que

$$n_e e_e = \frac{8\pi}{h^3} m_e^4 c^5 \mathcal{J}_{22}(\zeta_e, \mu_e^*), \quad p_e = \frac{8\pi}{h^3} m_e^4 c^5 \mathcal{J}_{40}(\zeta_e, \mu_e^*). \quad (7.42)$$

7.4. Método de Chapman-Enskog

Ahora vamos a determinar a partir de (7.33) la función de distribución fuera de equilibrio de los electrones, mediante la adopción de la metodología de Chapman-Enskog. Para ello, se busca una solución de la forma

$$f_e = f_e^{(0)} + \phi_e, \quad (7.43)$$

donde la desviación de la función de distribución de equilibrio se considera que es una cantidad pequeña, es decir, $|\phi_e| \ll 1$. Si insertamos (7.43) en la ecuación de Boltzmann (7.33) obtenemos

$$p_e^\alpha \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c} F^{\alpha\beta} p_{e\beta} \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial p_e^\alpha} - \frac{e}{c} F^{\alpha\beta} p_{e\beta} \frac{\partial \phi_e}{\partial p_e^\alpha} = -\frac{U^\alpha p_{e\alpha}}{c^2 \tau_{eb}} \phi_e, \quad (7.44)$$

donde no hemos tenido en cuenta el término $\partial \phi_e / \partial x^\alpha$, ya que no es nuestro objetivo para la obtención de las ecuaciones constitutivas que son funciones de las derivadas de segundo orden (las ecuaciones Burnett). La ecuación anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \frac{-2}{h^3} \frac{\exp\left(-\frac{\mu_e}{kT} + \frac{U^\alpha p_{e\alpha}}{kT}\right)}{\left[\exp\left(-\frac{\mu_e}{kT} + \frac{U^\alpha p_{e\alpha}}{kT}\right) + 1\right]^2} \left\{ \frac{1}{c^2} (p_e^\alpha U_\alpha) \left[D \left(\frac{\mu_e}{kT} \right) + \frac{p_e^\beta U_\beta}{kT^2} DT \right] \right. \\ & + \frac{p_e^\beta U_\beta}{kT^2} p_{e\alpha} \left[\nabla^\alpha T - \frac{T}{c^2} DU^\alpha \right] - \frac{e}{kT} p_{e\alpha} \left[E^\alpha - \frac{kT}{e} \nabla^\alpha \left(\frac{\mu_e}{kT} \right) \right] \\ & \left. - \frac{p_{e\alpha} p_{e\beta}}{kT} \nabla^\alpha U^\beta \right\} = \frac{U^\gamma p_{e\gamma}}{c^2 \tau_{eb}} \left[1 + \frac{m_e c}{U^\delta p_{e\delta}} \left(\frac{\omega_e \tau_{eb}}{B} \right) B^{\alpha\beta} p_{e\beta} \frac{\partial}{\partial p_e^\alpha} \right] \phi_e, \end{aligned} \quad (7.45)$$

donde no consideramos el término $E^\alpha \partial \phi_e / \partial p_e^\alpha$, ya que también se refiere a un término de segundo orden. Además, en la ecuación anterior se ha introducido la frecuencia de ciclotrón de electrones $\omega_e = eB/m_e$ – donde B es el módulo de la inducción de flujo magnético – y los operadores diferenciales $D \equiv U^\alpha \partial_\alpha$ y $\nabla^\alpha \equiv \Delta^{\alpha\beta} \partial_\beta$.

En este trabajo estamos interesados en la derivación de las leyes de Fourier y de Ohm, por lo que nos podemos limitar a las fuerzas termodinámicas que son cuatro-vectores, es decir,

$$\nabla^\alpha \mathcal{T} \equiv \left[\nabla^\alpha T - \frac{T}{c^2} DU^\alpha \right] \quad \text{y} \quad \mathcal{E}^\alpha \equiv \left[E^\alpha - \frac{kT}{e} \nabla^\alpha \left(\frac{\mu_e}{kT} \right) \right], \quad (7.46)$$

la primera siendo una combinación de un gradiente de temperatura y una aceleración, mientras que la segunda se refiere a una combinación de un campo eléctrico externo y un gradiente del potencial químico de los electrones. Por lo tanto, se obtiene a partir de (C.1) que la desviación de la función de distribución se puede escribir como

$$\phi_e = A_\alpha \left\{ \frac{p_e^\beta U_\beta}{kT^2} \nabla^\alpha \mathcal{T} - \frac{e}{kT} \mathcal{E}^\alpha \right\}. \quad (7.47)$$

Hasta términos en $(\omega_e \tau_{eb}/B)^2$, el cuadrivector A^α está dado por

$$\begin{aligned} A^\alpha = & \frac{-2}{h^3} \frac{\exp\left(-\frac{\mu_e}{kT} + \frac{U^\alpha p_{e\alpha}}{kT}\right)}{\left[\exp\left(-\frac{\mu_e}{kT} + \frac{U^\alpha p_{e\alpha}}{kT}\right) + 1\right]^2} \frac{c^2 \tau_{eb}}{U^\gamma p_{e\gamma}} \left[\eta^{\alpha\beta} - \frac{m_e c}{U^\delta p_{e\delta}} \left(\frac{\omega_e \tau_{eb}}{B} \right) B^{\alpha\beta} \right. \\ & \left. + \left(\frac{m_e c}{U^\delta p_{e\delta}} \right)^2 \left(\frac{\omega_e \tau_{eb}}{B} \right)^2 B_\gamma^\alpha B^{\gamma\beta} \right] p_{e\beta}. \end{aligned} \quad (7.48)$$

La ecuación (C.2) junto con (C.3) representan la desviación de la función de distribución de los electrones como función de las fuerzas termodinámicas que son cuatro-vectores. Utilizaremos la función de distribución (7.43) en la siguiente sección con el fin de determinar las leyes de Ohm y de Fourier.

7.5. Las leyes de Ohm y de Fourier

La determinación del flujo difusivo J_e^α y del flujo de calor q_e^α de los electrones procede observando que (7.12), (7.18) and (7.19) conducen a

$$\frac{h_b}{h} J_e^\alpha - \frac{n_e}{nh} q_e^\alpha = \Delta_\beta^\alpha N_e^\beta = \Delta_\beta^\alpha \int c p_e^\beta f_e \frac{d^3 p_e}{p_{e0}}, \quad (7.49)$$

$$\frac{h_b h_e}{h} J_e^\alpha + \frac{n_b h_b}{nh} q_e^\alpha = \Delta_\beta^\alpha U_\gamma T_e^{\beta\gamma} = \Delta_\beta^\alpha U_\gamma \int c p_e^\beta p_e^\gamma f_e \frac{d^3 p_e}{p_{e0}}. \quad (7.50)$$

Al insertar la función de distribución de los electrones (7.43) junto con (C.2) y (C.3) en (C.4) y (C.5) y la integración de las ecuaciones resultantes, implica un sistema de ecuaciones para J_e^α y q_e^α que se utiliza para determinar el flujo de calor de la mezcla de (7.32) y el cuadrivector de corriente eléctrica (7.30) o (7.31). A partir de este sistema de ecuaciones se deducen las leyes de Fourier y de Ohm

$$q^\alpha = \Lambda^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{T} + \Upsilon^{\alpha\beta} \mathcal{E}_\beta, \quad I^\alpha = \sigma^{\alpha\beta} \mathcal{E}_\beta + \Omega^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{T}, \quad (7.51)$$

respectivamente. Arriba $\Lambda^{\alpha\beta}$ es un tensor asociado con la conductividad térmica, $\sigma^{\alpha\beta}$ es el tensor de conductividad eléctrica, mientras que los tensores $\Upsilon^{\alpha\beta}$ y $\Omega^{\alpha\beta}$ están relacionados con efectos cruzados. Podemos representar las expresiones generales de los tensores antes mencionados como

$$\begin{aligned} \{\Lambda^{\alpha\beta}, \Upsilon^{\alpha\beta}, \sigma^{\alpha\beta}, \Omega^{\alpha\beta}\} &= \{a_1, b_1, c_1, d_1\} \eta^{\alpha\beta} + \{a_2, b_2, c_2, d_2\} B^{\alpha\beta} \\ &+ \{a_3, b_3, c_3, d_3\} B^{\alpha\gamma} B_\gamma^\beta, \end{aligned} \quad (7.52)$$

donde los coeficiente escalares a_1 hasta d_3 son los siguientes:

1. Coeficientes asociados con $\Lambda^{\alpha\beta}$

$$a_1 = \frac{8\pi m_e^5 c^9 \tau_{eb} h}{3h^3 h_b k T^2} \left(\mathcal{J}_{41}^\bullet - \frac{h_b}{m_e c^2} \mathcal{J}_{40}^\bullet \right), \quad (7.53)$$

$$a_2 = \frac{8\pi m_e^5 c^9 \tau_{eb} h}{3h^3 h_b k T^2} \left(\mathcal{J}_{40}^\bullet - \frac{h_b}{m_e c^2} \mathcal{J}_{4-1}^\bullet \right) \left(\frac{\omega_e \tau_{eb}}{cB} \right), \quad (7.54)$$

$$a_3 = \frac{8\pi m_e^5 c^9 \tau_{eb} h}{3h^3 h_b k T^2} \left(\mathcal{J}_{4-1}^\bullet - \frac{h_b}{m_e c^2} \mathcal{J}_{4-2}^\bullet \right) \left(\frac{\omega_e \tau_{eb}}{cB} \right)^2. \quad (7.55)$$

2. Coeficientes asociados con $\Upsilon^{\alpha\beta}$

$$b_1 = -\frac{8\pi m_e^4 c^7 \tau_{eb} h e}{3h^3 h_b k T} \left(\mathcal{J}_{40}^\bullet - \frac{h_b}{m_e c^2} \mathcal{J}_{4-1}^\bullet \right), \quad (7.56)$$

$$b_2 = -\frac{8\pi m_e^4 c^7 \tau_{eb} h e}{3h^3 h_b k T} \left(\mathcal{J}_{4-1}^\bullet - \frac{h_b}{m_e c^2} \mathcal{J}_{4-2}^\bullet \right) \left(\frac{\omega_e \tau_{eb}}{cB} \right), \quad (7.57)$$

$$b_3 = -\frac{8\pi m_e^4 c^7 \tau_{eb} h e}{3h^3 h_b k T} \left(\mathcal{J}_{4-2}^\bullet - \frac{h_b}{m_e c^2} \mathcal{J}_{4-3}^\bullet \right) \left(\frac{\omega_e \tau_{eb}}{cB} \right)^2. \quad (7.58)$$

 3. Coeficientes asociados con $\sigma^{\alpha\beta}$

$$c_1 = \frac{8\pi m_e^4 c^7 \tau_{eb} n_e (Z+1) e^2}{3h^3 n h_b k T} \left(\mathcal{J}_{40}^\bullet + \frac{n_b h_b}{n_e m_e c^2} \mathcal{J}_{4-1}^\bullet \right), \quad (7.59)$$

$$c_2 = \frac{8\pi m_e^4 c^7 \tau_{eb} n_e (Z+1) e^2}{3h^3 n h_b k T} \left(\mathcal{J}_{4-1}^\bullet + \frac{n_b h_b}{n_e m_e c^2} \mathcal{J}_{4-2}^\bullet \right) \left(\frac{\omega_e \tau_{eb}}{cB} \right), \quad (7.60)$$

$$c_3 = \frac{8\pi m_e^4 c^7 \tau_{eb} n_e (Z+1) e^2}{3h^3 n h_b k T} \left(\mathcal{J}_{4-2}^\bullet + \frac{n_b h_b}{n_e m_e c^2} \mathcal{J}_{4-3}^\bullet \right) \left(\frac{\omega_e \tau_{eb}}{cB} \right)^2. \quad (7.61)$$

 4. Coeficientes asociados con $\Omega^{\alpha\beta}$

$$d_1 = -\frac{8\pi m_e^5 c^9 \tau_{eb} n_e (Z+1) e}{3h^3 n h_b k T^2} \left(\mathcal{J}_{41}^\bullet + \frac{n_b h_b}{n_e m_e c^2} \mathcal{J}_{40}^\bullet \right), \quad (7.62)$$

$$d_2 = -\frac{8\pi m_e^5 c^9 \tau_{eb} n_e (Z+1) e}{3h^3 n h_b k T^2} \left(\mathcal{J}_{40}^\bullet + \frac{n_b h_b}{n_e m_e c^2} \mathcal{J}_{4-1}^\bullet \right) \left(\frac{\omega_e \tau_{eb}}{cB} \right), \quad (7.63)$$

$$d_3 = -\frac{8\pi m_e^5 c^9 \tau_{eb} n_e (Z+1) e}{3h^3 n h_b k T^2} \left(\mathcal{J}_{4-1}^\bullet + \frac{n_b h_b}{n_e m_e c^2} \mathcal{J}_{4-2}^\bullet \right) \left(\frac{\omega_e \tau_{eb}}{cB} \right)^2. \quad (7.64)$$

En las ecuaciones anteriores \mathcal{J}_{nm}^\bullet representa la derivada parcial de (7.41) con respecto al potencial químico de los electrones $\mu_e^* = \mu_e / (kT)$ en unidades de kT . Además, se ha introducido la abreviatura $\zeta_e = m_e c^2 / (kT)$ que se refiere a la relación entre la energía en reposo de los electrones $m_e c^2$ y la energía térmica de la mezcla kT . Notemos que en todas las ecuaciones anteriores se tiene que considerar $Z = 1$ para las mezclas binarias de electrones y protones y $Z = 0$ para las mezclas binarias de electrones y fotones.

El tensor de conductividad térmica $\lambda^{\alpha\beta}$ se obtiene eliminando \mathcal{E}^α de (C.6)₁ mediante el uso de (C.6)₂ asumiendo que no hay corriente eléctrica. Por lo tanto, se obtiene una relación entre \mathcal{E}^α y $\nabla^\alpha \mathcal{T}$ de (C.6)₂ que se puede utilizar para escribir la ley de Fourier como

$$q^\alpha = \lambda^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{T}, \quad \text{where} \quad \lambda^{\alpha\beta} = e_1 \eta^{\alpha\beta} + e_2 B^{\alpha\beta} + e_3 B^{\alpha\gamma} B_\gamma^\beta. \quad (7.65)$$

Hasta términos en $[\omega_e \tau_{eb} / (cB)]^2$ los coeficientes escalares e_1 hasta e_3 son

$$e_1 = \frac{a_1 c_1 - b_1 d_1}{c_1}, \quad e_2 = \frac{a_2 c_1^2 - b_1 (c_1 d_2 - c_2 d_1) - b_2 c_1 d_1}{c_1^2}, \quad (7.66)$$

$$e_3 = \frac{a_3 c_1^3 - b_1 [d_1 (c_2^2 - c_1 c_3) - c_1 c_2 d_2] - c_1^2 (b_1 d_3 + b_3 d_1) - c_1 b_2 (c_1 d_2 - c_2 d_1)}{c_1^3}. \quad (7.67)$$

Con el fin de obtener una mejor interpretación física de los componentes de los tensores, es habitual en la teoría de los gases ionizados descomponer las fuerzas termodinámicas $\nabla_\alpha \mathcal{T}$ y \mathcal{E}_α en partes paralela, perpendicular y transversal a la inducción de flujo magnético. Para lograr este objetivo seguimos a van Erkelens y van Leeuwen [14] e introducimos el dual $\tilde{B}^{\alpha\beta}$ delo tensor de inducción de flujo magnético tensor $B^{\alpha\beta}$ definido por

$$\tilde{B}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} B_{\gamma\delta}. \quad (7.68)$$

Uno puede verificar fácilmente a partir de (7.68) y (7.28) que en un sistema de Lorentz localmente en reposo las únicas componentes no nulas de $\tilde{B}^{\alpha\beta}$ son $\tilde{B}^{0i} = cB^i$, dado que $\tilde{B}^{ij} = 0$ y $\tilde{B}^{00} = 0$.

La descomposición deseada de las fuerzas termodinámicas en partes paralelas $\nabla_{\parallel}^{\alpha} \mathcal{T}$, $\mathcal{E}_{\parallel}^{\alpha}$; perpendiculares $\nabla_{\perp}^{\alpha} \mathcal{T}$, $\mathcal{E}_{\perp}^{\alpha}$ y transversales $\nabla_t^{\alpha} \mathcal{T}$, \mathcal{E}_t^{α} es

$$\mathcal{F}_{\parallel}^{\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} B^{\gamma\delta} B_{\gamma\delta}\right)} \tilde{B}^{\alpha\beta} \tilde{B}_{\beta\gamma} \mathcal{F}^{\gamma}, \quad \mathcal{F}_{\perp}^{\alpha} = \frac{-1}{\left(\frac{1}{2} B^{\gamma\delta} B_{\gamma\delta}\right)} B^{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} \mathcal{F}^{\gamma}, \quad (7.69)$$

$$\mathcal{F}_t^{\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} B^{\gamma\delta} B_{\gamma\delta}\right)^{\frac{1}{2}}} B^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\beta}, \quad (7.70)$$

donde \mathcal{F}^{α} es la abreviatura de \mathcal{E}^{α} o $\nabla^{\alpha} \mathcal{T}$. En un marco localmente en reposo de Lorentz (7.69) y (7.70) se reducen a

$$\mathcal{F}_{\parallel}^0 = \mathcal{F}_{\perp}^0 = \mathcal{F}_t^0 = 0, \quad \mathcal{F}_{\parallel} = \frac{1}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \mathcal{F}) \mathbf{B}, \quad (7.71)$$

$$\mathcal{F}_{\perp} = \frac{1}{B^2} [(\mathbf{B} \cdot \mathcal{F}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathcal{F}], \quad \mathcal{F}_t = \frac{1}{B} (\mathcal{F} \times \mathbf{B}), \quad (7.72)$$

gracias a la relación $\sqrt{B^{\gamma\delta} B_{\gamma\delta}/2} = c\sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}} = cB$. De las ecuaciones anteriores es fácil verificar que \mathcal{F}_{\parallel} es paralela a la inducción de flujo magnético \mathbf{B} , \mathcal{F}_{\perp} perpendicular al mismo, mientras que \mathcal{F}_t es perpendicular a ambos \mathcal{F}_{\parallel} y \mathcal{F}_{\perp} .

Ahora, mediante el uso de la siguiente relación

$$(cB)^2 \eta^{\alpha\beta} = \tilde{B}^{\alpha\gamma} \tilde{B}_{\gamma}^{\beta} - B^{\alpha\gamma} B_{\gamma}^{\beta}, \quad (7.73)$$

las leyes de Fourier y de Ohm se pueden reescribir en términos de $\mathcal{F}_{\parallel}^{\alpha}$, $\mathcal{F}_{\perp}^{\alpha}$ y \mathcal{F}_t^{α} . De hecho, si sustituimos (7.73) en la ley de Ohm (C.6)₂ y la ley de Fourier (7.65)₁ y hacemos uso de las definiciones (7.69) y (7.70), se sigue que el cuadrivector de corriente eléctrica, y el flujo de calor se pueden escribir, sin los términos de efectos cruzados, como

$$I^{\alpha} = \sigma_{\parallel} \mathcal{E}_{\parallel}^{\alpha} + \sigma_{\perp} \mathcal{E}_{\perp}^{\alpha} + \sigma_t \mathcal{E}_t^{\alpha}, \quad q^{\alpha} = \lambda_{\parallel} \nabla_{\parallel}^{\alpha} \mathcal{T} + \lambda_{\perp} \nabla_{\perp}^{\alpha} \mathcal{T} + \lambda_t \nabla_t^{\alpha} \mathcal{T}, \quad (7.74)$$

respectivamente. En las ecuaciones anteriores los escalares son llamados las componentes paralelas, perpendiculares y transversales de los tensores, y sus expresiones se denotan por

$$\begin{cases} \sigma_{\parallel} = c_1, & \sigma_{\perp} = c_1 - c_3 (cB)^2, & \sigma_t = c_2 (cB), \\ \lambda_{\parallel} = e_1, & \lambda_{\perp} = e_1 - e_3 (cB)^2, & \lambda_t = e_2 (cB). \end{cases} \quad (7.75)$$

De las fórmulas anteriores obtendremos los componentes paralelas, perpendiculares y transversales de las conductividades eléctricas y térmicas para las mezclas binarias de electrones y protones y de electrones y fotones.

7.6. Conductividades eléctricas y térmicas

7.6.1. Electrones no-degenerados

Aquí vamos a analizar dos casos importantes, a saber: una mezcla no-relativista de protones y electrones no degenerados y una mezcla ultra-relativista de fotones y electrones no degenerados. Notamos que el potencial químico de los electrones en el caso no degenerado debe satisfacer la condición de que $e^{-\mu_e^*} \gg 1$.

1. Una mezcla no-relativista de electrones y protones se identifica por dos condiciones $m_p/m_e \gg 1$ y $\zeta_e = m_e c^2/(kT) \gg 1$. En este caso los coeficientes de transporte son

$$\sigma_{\parallel} = \frac{e^2 \tau_{ep} n_e}{m_e} \left(1 - \frac{5}{2\zeta_e}\right), \quad \sigma_t = \frac{e^2 \tau_{ep} n_e (\omega_e \tau_{ep})}{m_e} \left(1 - \frac{5}{\zeta_e}\right), \quad (7.76)$$

$$\sigma_{\perp} = \frac{e^2 \tau_{ep} n_e}{m_e} \left[\left(1 - \frac{5}{2\zeta_e}\right) - (\omega_e \tau_{ep})^2 \left(1 - \frac{15}{2\zeta_e}\right) \right], \quad (7.77)$$

$$\lambda_{\parallel} = \frac{5k^2 T \tau_{ep} n_e n}{2m_e n_p} \left(1 - \frac{3}{\zeta_e}\right), \quad \lambda_t = \frac{5k^2 T \tau_{ep} n_e n (\omega_e \tau_{ep})}{2m_e n_p} \left(1 - \frac{15}{2\zeta_e}\right), \quad (7.78)$$

$$\lambda_{\perp} = \frac{5k^2 T \tau_{ep} n_e n}{2m_e n_p} \left[\left(1 - \frac{3}{\zeta_e}\right) - (\omega_e \tau_{ep})^2 \left(1 - \frac{12}{\zeta_e}\right) \right]. \quad (7.79)$$

Las primeras correcciones relativistas a los coeficientes de transporte están relacionadas con el término $1/\zeta_e$ y si fijamos nuestra atención en los términos dominantes sin las correcciones relativistas, las conductividades eléctricas pueden ser escritas a partir de (7.76) y (7.77) como:

$$\sigma_{\parallel} = \frac{e^2 \tau_{ep} n_e}{m_e}, \quad \sigma_t = \sigma_{\parallel} (\omega_e \tau_{ep}), \quad \sigma_{\perp} \approx \frac{\sigma_{\parallel}}{1 + (\omega_e \tau_{ep})^2}, \quad (7.80)$$

ya que hemos considerado $\omega_e \tau_{ep} \ll 1$. Las expresiones para las conductividades eléctricas (7.80) son bien conocidas en la teoría de los gases ionizados no degenerado y no relativista (véase, por ejemplo, Cap [16]) y muestran su dependencia en la inducción de flujo magnético B a través de la frecuencia de ciclotrón de electrones ω_e . Por otra parte, las conductividades térmicas (7.78) y (7.79) sin las correcciones relativistas se vuelven

$$\lambda_{\parallel} = \frac{5k^2 T \tau_{ep} n_e n}{2m_e n_p}, \quad \lambda_t = \lambda_{\parallel} (\omega_e \tau_{ep}), \quad \lambda_{\perp} \approx \frac{\lambda_{\parallel}}{1 + (\omega_e \tau_{ep})^2}. \quad (7.81)$$

Nótese que la expresión para la conductividad térmica paralela es bien conocida en la teoría de los gases no relativistas que se desprenden de una ecuación modelo tipo BGK.

2. Una mezcla ultra-relativista de fotones y electrones no degenerados se caracteriza por la condición $\zeta_e = m_e c^2/(kT) \ll 1$. En este caso los coeficientes de transporte se reducen a

$$\sigma_{\parallel} = \sigma_{\perp} = \frac{e^2 c^2 \tau_{e\gamma} n_e (3n_e + 4n_{\gamma})}{12nkT}, \quad \sigma_t = \frac{e^2 c^2 \tau_{e\gamma} n_e (n_e + 2n_{\gamma}) (\omega_e \tau_{e\gamma}) \zeta_e}{12nkT}, \quad (7.82)$$

$$\lambda_{\parallel} = \lambda_{\perp} = \frac{4kc^2\tau_{e\gamma}n_en}{3n_e + 4n_{\gamma}}, \quad \lambda_t = \frac{8kc^2\tau_{e\gamma}n_en^2(\omega_e\tau_{ep})\zeta_e}{(3n_e + 4n_{\gamma})^2}. \quad (7.83)$$

Inferimos, de estas ecuaciones, que las conductividades eléctrica y térmica, paralelas y perpendiculares coinciden, mientras que las conductividades eléctricas y térmicas transversales son cantidades pequeñas, ya que son proporcionales a ζ_e .

7.6.2. Electrones completamente degenerados

Todas las conductividades térmicas desaparecen en el límite de electrones completamente degenerados, dado que este comportamiento está conectado con el resultado bien conocido de la mecánica estadística de que la capacidad calorífica de un gas completamente degenerado desaparece. Para las conductividades eléctricas existen tres casos importantes que deben analizarse que son: una mezcla no-relativista de protones y electrones completamente degenerados, una mezcla ultra-relativista de fotones y electrones completamente degenerados y una mezcla de protones no-relativistas y electrones ultra-relativistas completamente degenerados. Procedemos a analizar las conductividades eléctricas para estos casos.

1. Una mezcla no relativista de protones y electrones completamente degenerados se identifica por $\zeta_e \gg 1$ y $p_F \ll m_e c$, donde p_F denota el momento de Fermi de los electrones. Aquí tenemos que

$$\sigma_{\parallel} = \frac{8\pi e^2 \tau_{ep} p_F^3}{3m_e h^3} \left(1 - \frac{p_F^2}{2m_e^2 c^2}\right), \quad \sigma_t = \frac{8\pi e^2 \tau_{ep} p_F^3 (\omega_e \tau_{ep})}{3m_e h^3} \left(1 - \frac{p_F^2}{m_e^2 c^2}\right), \quad (7.84)$$

$$\sigma_{\perp} = \frac{8\pi e^2 \tau_{ep} p_F^3}{3m_e h^3} \left[\left(1 - \frac{p_F^2}{2m_e^2 c^2}\right) - (\omega_e \tau_{ep})^2 \left(1 - \frac{3p_F^2}{2m_e^2 c^2}\right) \right]. \quad (7.85)$$

Fijemos nuestra atención en los términos dominantes de las conductividades eléctricas

$$\sigma_{\parallel} = \frac{8\pi e^2 \tau_{ep} p_F^3}{3m_e h^3}, \quad \sigma_t = \sigma_{\parallel} (\omega_e \tau_{ep}), \quad \sigma_{\perp} \approx \frac{\sigma_{\parallel}}{1 + (\omega_e \tau_{ep})^2}, \quad (7.86)$$

dado que el término $p_F/(m_e c^2)$ es una cantidad pequeña y la condición $\omega_e \tau_{ep} \ll 1$ se cumple. Estas ecuaciones muestran la dependencia de las conductividades eléctricas en la inducción de flujo magnético B a través de la frecuencia de ciclotrón de electrones ω_e .

2. Una mezcla ultra-relativista de fotones y electrones completamente degenerados se caracteriza por las condiciones $\zeta_e \ll 1$ y $p_F \gg m_e c$, y las conductividades eléctricas para este caso son

$$\sigma_{\parallel} = \sigma_{\perp} = \frac{8\pi e^2 \tau_{e\gamma} c^2 n_e p_F^3}{12nkTh^3} \left(1 + \frac{4kTn_{\gamma}}{n_e c p_F}\right), \quad (7.87)$$

$$\sigma_t = \frac{8\pi e^2 \tau_{e\gamma} n_e \zeta_e c (\omega_e \tau_{e\gamma}) p_F^2}{12nh^3} \left(1 + \frac{4kTn_{\gamma}}{n_e c p_F}\right). \quad (7.88)$$

Se deduce de las ecuaciones anteriores que las conductividades eléctricas paralelas y perpendiculares son iguales entre sí, mientras que la conductividad eléctrica transversal es una cantidad pequeña ya que es proporcional a ζ_e .

3. Una mezcla de protones no-relativistas y electrones ultra-relativistas completamente degenerados, también es un caso importante, ya que podría describir una estrella enana blanca. Aquí las condiciones que se satisfacen son $m_p/m_e \gg 1$ y $p_F \gg m_e c$ y las conductividades eléctricas se escriben como

$$\sigma_{\parallel} = \sigma_{\perp} = \frac{8\pi e^2 \tau_{ep} c p_F^2}{3h^3} \left(1 - \frac{m_e^2 c^2}{2p_F^2}\right), \quad \sigma_t = \frac{8\pi e^2 \tau_{ep} \zeta_e kT (\omega_e \tau_{ep}) p_F}{3h^3}, \quad (7.89)$$

mostrando que las conductividades paralelas y perpendiculares coinciden y que la conductividad transversal es una cantidad pequeña, ya que es proporcional a $\zeta_e \ll 1$.

Anexo: Integrales $\mathcal{J}_{nm}^{\bullet}$

1. Caso no-degenerado

En este caso $e^{-\mu_e^*} \gg 1$ de modo que las integrales \mathcal{J}_{nm} se reducen a

$$\mathcal{J}_{nm}(\zeta_e, \mu_e^*) = \int_0^{\infty} e^{-\zeta_e \cosh \vartheta + \mu_e^* \sinh \vartheta} \sinh^n \vartheta \cosh^m \vartheta d\vartheta, \quad (7.90)$$

y las integrales $\mathcal{J}_{nm}^{\bullet}(\zeta_e, \mu_e^*) \equiv \mathcal{J}_{nm}^{\bullet}$ pueden expresarse en términos de funciones de Bessel modificadas de segunda especie $K_n(\zeta_e) \equiv K_n$ y sus integrales $\text{Ki}_n(\zeta_e) \equiv \text{Ki}_n$ (véase Abramowitz y Stegun [17] páginas 376 y 483) de la siguiente manera:

$$\mathcal{J}_{41}^{\bullet} = \frac{e^{\mu_e^*}}{2\zeta_e} (K_4 - K_2), \quad \mathcal{J}_{40}^{\bullet} = \frac{3e^{\mu_e^*}}{4\zeta_e} (K_3 - K_1), \quad \mathcal{J}_{4-1}^{\bullet} = \frac{e^{\mu_e^*}}{\zeta_e} (K_2 - \text{Ki}_2), \quad (7.91)$$

$$\mathcal{J}_{4-2}^{\bullet} = \frac{e^{\mu_e^*}}{\zeta_e} (K_1 + \text{Ki}_1 - \text{Ki}_3), \quad \mathcal{J}_{4-3}^{\bullet} = \frac{3e^{\mu_e^*}}{\zeta_e} (\text{Ki}_2 - \text{Ki}_4). \quad (7.92)$$

Además, el potencial químico de los electrones está dado por

$$e^{\mu_e^*} = \frac{n_e h^3}{8\pi m_e^2 c k T K_2}. \quad (7.93)$$

2. Caso completamente degenerado

Las integrales \mathcal{J}_{nm} en este caso se reducen a

$$\mathcal{J}_{nm} = \int_0^{\vartheta_F} \sinh^n \vartheta \cosh^m \vartheta d\vartheta, \quad \text{with} \quad \vartheta_F = \text{arcosh} \sqrt{1 + \left(\frac{p_F}{m_e c}\right)^2}, \quad (7.94)$$

donde p_F es el momento de Fermi momentum de los electrones. Las integrales \mathcal{J}_{nm}^\bullet son

$$\mathcal{J}_{41}^\bullet = \frac{1}{\zeta_e} \left(\frac{p_F}{m_e c} \right)^3 \sqrt{1 + \left(\frac{p_F}{m_e c} \right)^2}, \quad \mathcal{J}_{4-1}^\bullet = \frac{\left(\frac{p_F}{m_e c} \right)^3}{\zeta_e \sqrt{1 + \left(\frac{p_F}{m_e c} \right)^2}}, \quad (7.95)$$

$$\mathcal{J}_{40}^\bullet = \frac{1}{\zeta_e} \left(\frac{p_F}{m_e c} \right)^3, \quad \mathcal{J}_{4-2}^\bullet = \frac{\left(\frac{p_F}{m_e c} \right)^3}{\zeta_e \left[1 + \left(\frac{p_F}{m_e c} \right)^2 \right]}, \quad \mathcal{J}_{4-3}^\bullet = \frac{\left(\frac{p_F}{m_e c} \right)^3}{\zeta_e \left[1 + \left(\frac{p_F}{m_e c} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (7.96)$$

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente apoyado por el Consejo Brasileño de Investigación (CNPq).

Bibliografía

- [1] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross and M. Krook, "A model for collision processes in gases. Small amplitude processes in charged and neutral one-component system", *Phys. Rev.* **94**, 511-525 (1954).
- [2] P. Welander, "On the temperature jump in a rarefied gas", *Arkiv för Fysik* **7**, 507-553 (1954).
- [3] C. Marle, "Modèle cinétique pour l'établissement des lois de la conduction de la chaleur et de la viscosité en théorie de la relativité", *C. R. Acad. Sc. Paris* **260**, 6539-6541 (1965).
- [4] J. L. Anderson and H. R. Witting, "A relativistic relaxation-time model for the Boltzmann equation", *Physica* **74**, 466-488 (1974).
- [5] G. M. Kremer and C. H. Patsko, "Relativistic ionized gases: Ohm and Fourier laws from Anderson and Witting model equation", *Physica A* **322**, 329-344 (2003).
- [6] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen and Ch. G. van Weert, *Relativistic kinetic theory*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [7] C. Cercignani and G. M. Kremer, *The relativistic Boltzmann equation: theory and applications*, Birkhäuser, Basel, 2002.
- [8] E. A. Uehling, and G. E. Uhlenbeck, "Transport phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac gases. I", *Phys. Rev.* **43**, 552-561 (1933).
- [9] F. Jüttner, "Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie", *Ann. Physik und Chemie* **34**, 856-882 (1911).

7.6. Bibliografia

- [10] F. Jüttner, “Die relativistische Quantentheorie des idealen Gases”, *Zeitschr. Physik* **47**, 542-566 (1928).
- [11] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The classical theory of fields*, Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [12] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics*, Pergamon, Oxford, 1987.
- [13] S. R. de Groot and L. G. Suttrop, *Foundations of electrodynamics*, North-Holland, Amsterdam, 1972.
- [14] H. van Erkelens and W. A. van Leeuwen, “Relativistic Boltzmann theory for a plasma, I. The entropy production”, *Physica A* **89**, 113-126 (1977).
- [15] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Physical Kinetics*, Pergamon, Oxford, 1981.
- [16] F. Cap, *Lehrbuch der Plasmaphysik und Magnetohydrodynamik*, Springer, Wien, 1994.
- [17] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York, 1968.

Conducción de calor en fluidos auto-gravitantes relativistas

Roberto A. Sussman

Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, México D.F. 04510, México.

sussman@nucleares.unam.mx

Resumen

Consideramos la evolución dinámica, no perturbativa, de fluidos auto-gravitantes y conductores de calor en el marco de la Teoría de la Relatividad General. Logramos una descripción hidrodinámica completa y elegante de dichos fluidos mediante el formalismo “1+3”, que reduce las ecuaciones de campo de Einstein a un sistema de primer orden de ecuaciones de evolución y vínculos transversos sobre variables hidrodinámicas covariantes relacionadas a la 4-velocidad. Aplicamos este formalismo al caso del gas ideal con simetría esférica, logrando un sistema de ecuaciones cuya integración no requiere métodos numéricos sofisticados. Suponiendo condiciones cercanas al equilibrio térmico, exploramos las consecuencias dinámicas de utilizar varias ecuaciones constitutivas sugeridas en la literatura para el flujo de calor. Los resultados obtenidos son fácilmente generalizables y aplicables a cualquier sistema térmico.

8.1. Introducción

Todo sistema térmico auto-gravitante y relativista es estrictamente una fuente de campo de la teoría de la Relatividad General. El estudio de la dinámica de estos sistemas (*i.e.* la hidrodinámica) consiste en resolver las ecuaciones de campo de dicha teoría (las ecuaciones de Einstein), acopladas a las leyes de balance y conservación de una teoría termodinámica fenomenológica o de la Teoría Cinética Relativista. Si el sistema térmico evoluciona mediante procesos irreversibles asociados a la conducción de calor y/o a la viscosidad, es necesario acoplar las ecuaciones de Einstein a una teoría termodinámica que específicamente describa estados fuera del equilibrio térmico (así sea cercanos a éste, ver [1]). Para mayor detalle sobre el estudio de sistemas térmicos disipativos en Relatividad General, se recomienda al lector consultar la abundante literatura existente sobre el formalismo general [2, 3]. En particular, las referencias [4, 5] proporcionan reseñas extensas del tema.

Las ecuaciones de Einstein son un sistema muy complicado de ecuaciones diferenciales parciales, no-lineales, de segundo orden en las funciones métricas (potenciales gravitacionales). Aunque existen soluciones analíticas compatibles con sistemas térmicos disipativos (ver reseña en [6]), éstas suelen corresponder a condiciones excesivamente idealizadas (que podrían ser afísicas), como por ejemplo, suponer que sólo actúa un efecto disipativo y una cinemática restringida: conducción de calor sin viscosidad y 4-velocidad sin corte (shear-free) [7, 8, 9, 10] o viscosidad sin conducción de calor y 4-velocidad sin 4-aceleración [11, 12, 13, 14, 15, 16]. Aunque estos trabajos han logrado resultados interesantes, es razonable suponer que el estudio de fluidos en condiciones físicas más realistas necesariamente requiere utilizar métodos numéricos, cuya aplicación requiere a su vez la conversión de las ecuaciones de Einstein en un sistema de ecuaciones de evolución y vínculos de primer orden. Sin embargo, los formalismos numéricos de primer orden más soportados (como por ejemplo el método ADM) están basados en foliaciones o descomposiciones del espacio-tiempo en “espacios” 3-dimensionales (hipersuperficies tipo-espacio o “spacelike”) evolucionando en un “tiempo” dado por una dirección tipo-tiempo (“timelike”). En general, estas descomposiciones no son únicas y no son covariantes (*i.e.* no pueden ser definidas en forma independiente de la elección de coordenadas).

El formalismo 1+3, derivado inicialmente por Ehlers [17], y extendido y aplicado por Ellis, Bruni, Dunsby y van Elst [18, 19] (ver reseñas en [20, 21]), transforma las ecuaciones de Einstein en un sistema de ecuaciones de evolución y vínculos de primer orden, pero en forma covariante, ya que describe la evolución de objetos tensoriales asociados a un campo vectorial de 4-velocidades u^a y al tensor de momento-energía T^{ab} . Al proceder de esta manera, no es necesario descomponer al espacio-tiempo en “tiempo” y “espacio” a través de las coordenadas, ya que el vector u^a determina (en total independencia de la elección de coordenadas) la dirección tipo-tiempo de la evolución, definiendo como tiempo universal al tiempo propio que parametriza a las curvas integrales de u^a . Las tres direcciones espaciales quedan determinadas como direcciones ortogonales a u^a en forma covariante a través de un operador tensorial, h_{ab} , que proyecta a todo tensor en estas direcciones. Este formalismo es particularmente útil para formular las ecuaciones hidrodinámicas asociados a sistemas térmicos, ya que las cantidades tensoriales que involucra tienen una interpretación cinemática y física inmediata, y su evolución sucede en un marco comóvil con una 4-velocidad, u^a ,

que puede ser indentificada con la velocidad hidrodinámica macroscópica asociada a velocidades microscópicas características de los sistemas térmicos.

Curiosamente, el formalismo 1+3 sólo ha sido utilizado en la literatura (ver reseñas en [20, 21]) para estudiar sistemas hidrodinámicos en el contexto cosmológico y perturbativo, sobre un “background” dado por el modelo cosmológico homogéneo Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW). En el presente artículo consideramos su aplicación no-perturbativa a sistemas térmicos con conducción de calor pero sin viscosidad, lo cual es una situación idealizada (pero no afísica) que simplifica considerablemente el tratamiento matemático. Para simplificar aún más el estudio de fluidos relativistas auto-gravitantes con conducción de calor, supondremos que éstos son fuentes con simetría esférica, por lo que las ecuaciones de evolución y vínculos entre tensores del sistema 1+3 se reducen a ecuaciones diferenciales entre escalares covariantes.

El estudio termodinámico de sistemas relativistas disipativos fuera de equilibrio es un tema aún abierto a desarrollo teórico. Aunque se ha logrado derivar ecuaciones constitutivas para los flujos disipativos que cumplen con requisitos de causalidad de señales térmicas y estabilidad de soluciones, estas ecuaciones se han obtenido asumiendo una corriente de entropía construida en forma empírica añadiendo términos de mayor orden (segundo, tercero, etc) en los flujos disipativos (la teoría a primer orden lleva a las ecuaciones constitutivas de Eckart que violan la causalidad). Entre las tareas aún pendientes están el lograr una mejor verificación experimental y observacional de las predicciones de estas ecuaciones constitutivas en laboratorios “en tierra” y en sistemas astrofísicos, así como su justificación a partir de primeros principios a través de la Teoría Cinética Relativista y la Mecánica Estadística (se sugiere ver el enfoque crítico presentado en [5, 10]).

En el presente artículo consideramos la ecuación constitutiva de segundo orden para el flujo de calor (la ecuación constitutiva de la Termodinámica Irreversible Extendida [1] o de Israel–Stewart [2, 3, 4, 5]). También examinamos la ecuación constitutiva de Maxwell–Cattaneo que surge al truncar la ecuación completa a segundo orden. Al acoplar dichas ecuaciones constitutivas (cuya estructura es de ecuaciones de evolución) al sistema 1+3 (equivalente a las ecuaciones de Einstein) podemos examinar las condiciones en las cuales la ecuación truncada es una buena aproximación. Asimismo, obtenemos sistemas de ecuaciones de evolución auto-consistentes y completos para variables hidrodinámicas y cinemáticas covariantes, cuya integración no requiere métodos numéricos sofisticados. Por otra parte, el acoplamiento de las ecuaciones dinámicas 1+3 con ecuaciones constitutivas dadas como vínculos (la de Eckart [?, 3, 4] y otras propuestas en la literatura [22]) conduce a sistemas mucho más complicados y difíciles de integrar, lo cual es consistente con el hecho de que estas ecuaciones constitutivas sólo son válidas en condiciones de límite de campo débil (tanto cuasi-newtonianas como relativistas).

8.2. Termodinámica de fluidos relativistas conductores de calor

Un sistema térmico auto-gravitante que conduce calor y cuya viscosidad es despreciable es descrito por los siguientes tensores métrico y de momento-energía de un fluido “imperfecto” en un

marco comóvil: [4, 20]

$$ds^2 = -N^2(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^0dx^i + g_{ij}dx^i dx^j, \quad (8.1)$$

$$T^{ab} = \mu u^a u^b + p h^{ab} + 2q^{(a} u^{b)}, \quad (8.2)$$

$$u^a = N^{-1} \delta_0^a, \quad h_{ab} = u_a u_b + g_{ab}, \quad (8.3)$$

donde $x^0 = ct$, $x^i = x^1, x^2, x^3$, μ , p son la densidad de materia-energía y la presión de equilibrio y q^a es el vector de conducción de calor (los paréntesis $^{(a,b)}$ en (8.2) denotan simetrización en los índices a, b). El tensor (8.2) debe satisfacer la ecuación de balance $\nabla_b T^{ab} = 0$, donde ∇_a es la derivada covariante. Si suponemos vorticidad nula ($\nabla_a u_b = \nabla_b u_a$), la proyección en direcciones paralela y ortogonal a u^a de la ley de balance toma la forma:

$$u_a \nabla_b T^{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mu} + (p + \mu)\theta + \tilde{\nabla}_a q^a + 2\dot{u}_a q^a = 0, \quad (8.4)$$

$$h_{ca} \nabla_b T^{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_c^b \dot{q}_b + \sigma_{cb} q^b + \tilde{\nabla}_c p + (\mu + p)\dot{u}_c = 0, \quad (8.5)$$

donde $\dot{\mu} = u^a \nabla_a \mu$ es la derivada convectiva y $\tilde{\nabla}_c = h_c^b \nabla_b$ es el gradiente espacial, mientras que los parámetros cinemáticos θ (expansion), \dot{u}_a (4-aceleración) y σ_{ab} (corte o sisayadura o “shear”) están definidos por:

$$\theta = \nabla_a u^a, \quad \dot{u}_a = u^b \nabla_b u_a, \quad \sigma_{ab} = \nabla_{(a} u_{b)} - \dot{u}_a u_b - \frac{\theta}{3} h_{ab}. \quad (8.6)$$

Supondremos además que el fluido satisface la ecuación de Gibbs, la ley de balance de entropía y de conservación del número de partículas:

$$T dS = d\left(\frac{\mu}{n}\right) + p d\left(\frac{1}{n}\right), \quad (8.7)$$

$$\nabla_a n^a = 0, \quad n^a = n u^a, \quad \Rightarrow \quad \dot{n} + n\theta = 0, \quad (8.8)$$

$$\nabla_a S^a \geq 0, \quad S^a = S n u^a + \frac{X^a}{T}, \quad (8.9)$$

donde n , S , T son la densidad del numero de partículas, la entropía por partícula y la temperatura de equilibrio, mientras que X^a es un vector que se anula en condiciones de equilibrio térmico, por lo que debe estar formado por combinaciones algebraicas de q_a y u^a tal que se cumpla $\dot{S} \geq 0$ (su forma específica será discutida más adelante).

Las evolución dinámica del sistema térmico en cuestión se obtiene mediante la solución de las ecuaciones de campo de Einstein $G^{ab} = \kappa T^{ab}$ (con $\kappa = 8\pi G/c^4$) para la fuente (8.2), acopladas con las ecuaciones de balance (8.7)–(8.9) y con las condiciones de integrabilidad dadas por (8.4)–(8.5). Sin embargo, el sistema formado por las ecuaciones de Einstein más las ecuaciones (8.7)–(8.9) está incompleto, ya que es necesario asumir una ecuación de estado entre las variables de equilibrio que sea aplicable al sistema térmico a estudiar, así como una ecuación constitutiva para q_a .

8.3. Ecuaciones constitutivas.

La ecuación constitutiva (o de transporte) del flujo de calor q_a debe relacionar a éste con las variables de estado térmicas y cinemáticas. En un contexto relativista, dicha ecuación debería ser derivada (idealmente) mediante la Teoría Cinética Relativista, sin embargo, es más sencillo seguir un enfoque fenomenológico basado en suponer una forma empírica del término X^a en la corriente de entropía (8.9), sustituir ésta en las ecuaciones de balance (8.7)–(8.9) y exigir que se cumpla (8.9), para al último utilizar la Teoría Cinética para obtener la forma funcional de los coeficientes fenomenológicos que resultan (ver detalle en [1, 2, 3, 4, 5]).

La hipótesis más sencilla con respecto a X^a es considerar a este término como una función lineal $X^a = q^a$, lo cual conduce (a través de (8.4)–(8.9)) a la ecuación constitutiva para el flujo de calor que fue derivada por Eckart en 1940:

$$q_a = -\lambda \left[\tilde{\nabla}_a T + T \dot{u}_a \right], \quad (8.10)$$

donde $\lambda = \lambda(n, T)$ es el coeficiente de conducción calorífica, el cual es una cantidad fenomenológica característica de cada sistema térmico y debe ser determinado por la Teoría Cinética. La ecuación constitutiva de Eckart es una generalización relativista de la “ley de Fourier” ($q_a \propto \tilde{\nabla}_a T$), a la que añade el término \dot{u}_a que se puede identificar con la “inercia del calor” de la ley de Tolman [3, 4], la cual proporciona la 4-aceleración necesaria para que un sistema térmico inhomogéneo esté en equilibrio termodinámico (y por lo tanto, no esté en caída libre). Sin embargo, (8.10) es un vínculo algebraico para q_a , no una ley de evolución de las señales térmicas asociadas con q_a . Por lo tanto, adolece del mismo problema de causalidad que la ley de Fourier: predice una velocidad infinita para estas señales ([2, 3]).

Para remediar el problema de causalidad consideramos una corriente de entropía S^a en (8.9) que contenga términos de hasta segundo orden en las variables disipativas (q_a en nuestro caso), lo cual lleva a la forma

$$X^a = q^a + \frac{\delta(q_b q^b) u^a}{2}, \quad (8.11)$$

donde δ es un coeficiente fenomenológico. Tomando en cuenta (8.4)–(8.9), esta suposición empírica conduce para fluidos sin viscosidad (ver detalles en [4, 5]) a la siguiente ley de evolución de la entropía por partícula:

$$n T \dot{S} = \dot{\mu} + (\mu + p)\theta = -\nabla_a q^a - 2\dot{u}_a q^a, \quad (8.12)$$

y a la ecuación constitutiva de Israel–Stewart (o de la Termodinámica Irreversible Extendida):

$$c\tau h_a^b \dot{q}_b + q_a + \lambda \left(\tilde{\nabla}_a T + T \dot{u}_a \right) + \lambda T^2 \left[\tilde{\nabla}_b \left(\frac{c\tau}{2\lambda T^2} u^b \right) \right] q_a = 0, \quad (8.13)$$

donde τ es un tiempo de relajación, el cual indica la escala de tiempo en la que un sistema térmico alcanza el equilibrio cuando cesan las señales disipativas. La ecuación de Eckart (8.10) surge como el caso particular $\tau = 0$, en la que el sistema recobra el equilibrio instantáneamente. A menudo

en la literatura se considera la ecuación constitutiva de Maxwell–Cataneo que resulta de truncar (8.13) al eliminar el último término en paréntesis en el lado izquierdo:

$$c\tau h_a^b \dot{q}_b + q_a + \lambda \left(\tilde{\nabla}_a T + T \dot{u}_a \right) = 0. \quad (8.14)$$

Hay condiciones específicas en las que la ecuación truncada (8.14) es una buena aproximación a la ecuación general (8.13), por ejemplo, como se muestra en [4, 15, 16] si $\tau H \ll 1$ para la viscosidad volumétrica y de corte (shear) en el contexto cosmológico ($H = \dot{\theta}/3$ es el factor de expansion Hubble). Por otra parte, la ecuación de Eckart es una buena aproximación en condiciones cuasi–newtonianas, en las que τ es mucho menor que los tiempos macroscópicos característicos y las derivadas temporales son despreciables en comparación con gradientes espaciales, es decir: $\Delta\tau/\Delta t \ll 1$ y $\tau\dot{q} \approx \Delta\tau\Delta q/\Delta t \ll \nabla T$.

8.4. Espacio–tiempos con simetría esférica

El estudio dinámico de fuentes dadas por (8.2) se simplifica considerablemente si asumimos simetría esférica. En este caso la métrica, la 4–velocidad y el tensor de proyección vienen dados por:

$$ds^2 = -N^2 c^2 dt^2 + B^2 dr^2 + Y^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2), \quad (8.15)$$

$$u^a = N^{-1} \delta_0^a, \quad h_{ab} = u_a u_b + g_{ab} = g_{ij} \delta_a^i \delta_b^j, \quad i, j = r, \vartheta, \phi, \quad (8.16)$$

donde N , B , Y (y todos los escalares y componentes de tensores propios) dependen de (t, r) . El vector de conducción de calor es

$$q_a = Q \delta_a^r, \quad Q = Q(t, r). \quad (8.17)$$

mientras que los parámetros cinemáticos asociados a la 4–velocidad en (8.6) toman la forma:

$$\theta = \frac{\dot{B}}{B} + \frac{2\dot{Y}}{Y}, \quad (8.18)$$

$$\dot{u}_a = A \delta_a^r, \quad A = \frac{N'}{N}, \quad (8.19)$$

$$\sigma_a^b = \Sigma e_a^b, \quad \Sigma = -\frac{1}{3} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{Y}}{Y} \right), \quad (8.20)$$

donde $e_a^b = 3h_a^b - e_a e^b$, siendo $e^a = B^{-1} \delta_r^a$ un vector unitario ortogonal a u^a . Para todo escalar Φ tenemos

$$\dot{\Phi} = u^a \Phi_{,a} = \frac{\Phi_{,0}}{N} = \frac{1}{N} \frac{\partial \Phi}{c \partial t}, \quad (8.21)$$

$$\tilde{\nabla}_a \Phi = \Phi' \delta_a^r = \Phi_{,r} \delta_a^r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \delta_a^r, \quad (8.22)$$

que son, respectivamente, la derivada convectiva y su transversa o gradiente espacial (radial) con respecto a u^a . Otras cantidades importantes son el tensor eléctrico de Weyl: $E_{ab} = u^c u^d C_{acbd}$, donde C_{abcd} es el tensor de Weyl, y un escalar invariante de la simetría esférica [23]: la función de masa–energía $M = (Y/2) \mathcal{R}_{\theta\phi}^{\theta\phi}$, donde \mathcal{R}_{ab}^{ab} es tensor de Riemann. Para la métrica (8.15) estas variables son

$$E_a^b = \mathcal{E} e_a^b, \quad (8.23)$$

$$M = \frac{Y}{2} \left[\dot{Y}^2 - \frac{Y'^2}{B^2} + 1 \right], \quad (8.24)$$

donde \mathcal{E} es una función complicada de N , B , Y y sus derivadas, la cual puede ser expresada en forma compacta en términos de M y μ como

$$\mathcal{E} = \frac{M}{Y^3} - \frac{\kappa}{6} \mu, \quad (8.25)$$

En el enfoque tradicional, ya sea por métodos analíticos o numéricos, se resuelve las ecuaciones de campo de Einstein $G_{ab} = \kappa T_{ab}$, acopladas a (8.7)–(8.9), para la fuente (8.2) y la métrica (8.15)–(8.16) y habiendo asumido ecuaciones de estado y constitutivas dadas. Conociendo las funciones métricas se calcula y obtiene todas las cantidades físicas (dinámicas y termodinámicas), cinemáticas y geométricas descritas anteriormente. Sin embargo, éste no es el método más recomendable para sistemas hidrodinámicos.

8.5. Ecuaciones de evolución del formalismo “1+3”

El formalismo “1+3” [17, 18, 19, 20, 21] lleva a un sistema auto–consistente de ecuaciones de evolución y vínculos para μ , p , q_a , θ , \dot{u}_a , σ_{ab} , E_{ab} que son cantidades tensoriales (por lo tanto covariantes) asociadas al tensor de momento–energía T^{ab} y la 4–velocidad u^a de un fluido en el marco comóvil. Dichas ecuaciones y vínculos son completamente equivalentes al sistema formado por las ecuaciones de Einstein y las leyes de balance y conservación. Para un fluido conductor de calor descrito por la fuente (8.2) obtenemos las siguientes ecuaciones de evolución

$$\dot{\theta} = -\frac{\theta^2}{3} - \frac{\kappa}{2}(\mu + 3p) + \tilde{\nabla}_a \dot{u}^a + \dot{u}_a u^a, \quad (8.26)$$

$$\dot{\mu} = -(\mu + p)\theta - \tilde{\nabla}_a q^a - 2\dot{u}_a q^a, \quad (8.27)$$

$$\dot{\sigma}_{\langle ab \rangle} = -\frac{2}{3}\theta\sigma_{ab} + \dot{u}_{\langle a}\dot{u}_{b \rangle} + \tilde{\nabla}_{\langle a}\dot{u}_{b \rangle} - \sigma_{\langle a}^c\sigma_{b \rangle c} - E_{ab}, \quad (8.28)$$

$$h_a^b \dot{q}_b = -\frac{4}{3}\theta q_a - \sigma_{ab} q^b - \tilde{\nabla}_a p - (\mu + p)\dot{u}_a, \quad (8.29)$$

$$\dot{E}_{\langle ab \rangle} = -\theta E - \frac{\kappa}{2} \left[(\mu + p)\sigma_{ab} - \tilde{\nabla}_{\langle a} q_{b \rangle} \right] + 3\sigma_{\langle a}^c E_{b \rangle c} - \dot{u}_{\langle a} q_{b \rangle}, \quad (8.30)$$

junto con los vínculos:

$$\tilde{\nabla}_b \sigma_a^b = \frac{2}{3} \tilde{\nabla}_a \theta - \frac{\kappa}{2} q_a, \quad (8.31)$$

$$\tilde{\nabla}_b E_a^b = \frac{\kappa}{6} \left[\tilde{\nabla}_a \mu - \theta q_a + 3\sigma_{ab} q^b \right], \quad (8.32)$$

donde hemos supuesto que la vorticidad es nula (*i.e.* $\tilde{\nabla}_a u_b = \tilde{\nabla}_b u_a$) y los índices $\langle ab \rangle$ denotan simetrización y sustracción de la traza.

Tomando en cuenta que en espacio-tiempos con simetría esférica todos los vectores y tensores propios definidos en la sección anterior (\dot{u}_a , q_a , σ_{ab} , E_{ab}) están unívocamente determinados por los escalares covariantes A , Q , Σ , \mathcal{E} , el formalismo 1+3 aplicado a fuentes (8.2) con simetría esférica se reduce a un sistema de ecuaciones escalares de derivadas temporales y radiales para los siguientes escalares:

$$\mu, p, Q, \theta, A, \Sigma, M, \quad (8.33)$$

donde hemos usado (8.25) para reemplazar \mathcal{E} por M (el efecto de esto es reemplazar una ecuación de evolución por dos vínculos). El sistema 1+3 (8.26)–(8.32) se reduce a las siguientes ecuaciones de evolución:

$$\dot{\theta} = -\frac{\theta^2}{3} - \frac{\kappa}{2}(\mu + 3p) - 6\Sigma^2 + \frac{1}{B^2} \left[A \left(\frac{2Y'}{Y} - \frac{B'}{B} \right) + A' + A^2 \right], \quad (8.34)$$

$$\dot{\mu} = -(\mu + p)\theta + \frac{Q}{B^2} \left(\frac{B'}{B} + \frac{2Y'}{Y} + \frac{Q'}{Q} + 2A \right), \quad (8.35)$$

$$\dot{Q} = -\theta Q - p' - (\mu + p)A, \quad (8.36)$$

$$\dot{\Sigma} = -\frac{2}{3}\theta\Sigma + \Sigma^2 - \frac{M}{Y^3} + \frac{\kappa}{6}\mu + \frac{1}{3B^2} \left[A \left(\frac{B'}{B} + \frac{Y'}{Y} \right) - A' - A^2 \right], \quad (8.37)$$

$$\dot{Y} = Y \left(\frac{\theta}{3} + \Sigma \right), \quad (8.38)$$

$$\dot{B} = B \left(\frac{\theta}{3} - 2\Sigma \right), \quad (8.39)$$

sujetas a los siguientes vínculos:

$$\Sigma' = -3\Sigma \frac{Y'}{Y} - \frac{\theta'}{3} + \frac{\kappa}{2} Q = 0, \quad (8.40)$$

$$M = \frac{Y}{2} \left[Y^2 \left(\frac{\theta}{3} + \Sigma \right)^2 + 1 - \frac{Y'^2}{B^2} \right], \quad (8.41)$$

$$M' = \frac{\kappa}{2} \mu Y^2 Y' + \frac{\kappa}{6} Q (\theta + 3\Sigma) Y^3, \quad (8.42)$$

$$N' = N A, \quad (8.43)$$

Nótese que (8.25) permite eliminar \mathcal{E} por M en toda ecuación, además, obtenemos ecuaciones específicas a la simetría esférica y que no aparecen en el sistema (8.26)–(8.32): el vínculo (8.43)

surge de la definición (B.57) y permite determinar la función métrica N que aparece en las derivadas convectivas (8.21) en los lados izquierdos de las ecuaciones de evolución, también, fue necesario utilizar (8.18) y (8.20) para obtener las ecuaciones de evolución (8.38)–(8.39) para poder obtener las funciones métricas B , Y , las cuales aparecen en (8.34), (8.35), (8.37) y en los vínculos (8.40) y (8.41).

8.6. El gas ideal monatómico no-relativista

Para aplicar las ecuaciones 1+3 de la sección anterior a un sistema térmico específico, consideramos al gas ideal monatómico no-relativista de partículas de masa m caracterizado por la siguiente ecuación de estado

$$\mu = mc^2 n + \frac{3}{2} nkT, \quad p = nkT, \quad (8.44)$$

donde k es la constante de Boltzmann. Si asumimos la conservación del número de partículas, n definido arriba satisface la ley de evolución dada por (8.8), por lo que la ecuación de evolución (8.35) para μ se desdobra dos ecuaciones de evolución, para n y para T . Las ecuaciones de evolución (8.34)–(8.39) son ahora:

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{\kappa\rho}{6} \left(1 + \frac{9}{2}\beta\right) - 2\Sigma^2 + \frac{1}{3B^2} \left[A \left(\frac{2Y'}{Y} - \frac{B'}{B} \right) + A' + A^2 \right], \quad (8.45)$$

$$\dot{\rho} = -3H\rho, \quad (8.46)$$

$$\dot{\beta} = -2H\beta + \frac{2\epsilon}{3B^2} \left(\frac{B'}{B} + \frac{2Y'}{Y} + \frac{Q'}{Q} + 2A \right), \quad (8.47)$$

$$\dot{\epsilon} = -\beta \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\beta'}{\beta} \right) - \left(1 + \frac{5}{2}\beta \right) A, \quad (8.48)$$

$$\dot{\Sigma} = -2H\Sigma + \Sigma^2 - \frac{M}{Y^3} + \frac{\kappa\rho}{6} \left(1 + \frac{3}{2}\beta \right) + \frac{1}{3B^2} \left[A \left(\frac{B'}{B} + \frac{Y'}{Y} \right) - A' - A^2 \right], \quad (8.49)$$

$$\dot{Y} = Y(H + \Sigma), \quad (8.50)$$

$$\dot{B} = B(H - 2\Sigma), \quad (8.51)$$

mientras que los vínculos (8.40)–(8.43) toman la forma

$$\Sigma' = -3\Sigma \frac{Y'}{Y} - H' + \frac{\kappa}{2} Q = 0, \quad (8.52)$$

$$M = \frac{Y}{2} \left[Y^2 (H + \Sigma)^2 + 1 - \frac{Y'^2}{B^2} \right], \quad (8.53)$$

$$M' = \frac{\kappa}{2} \rho \left(1 + \frac{3}{2}\beta \right) Y^2 Y' + \frac{\kappa}{2} \rho \epsilon (H + \Sigma) Y^3, \quad (8.54)$$

$$N' = NA, \quad (8.55)$$

donde hemos introducido las siguientes variables

$$\rho = mc^2 n, \quad \beta = \frac{kT}{mc^2}, \quad H = \frac{\theta}{3}, \quad \epsilon = \frac{Q}{mc^2 n} = \frac{Q}{\rho}. \quad (8.56)$$

Este sistema es aún incompleto, ya que no ofrece una expresión (ecuación de evolución o vínculo) para determinar al escalar de la 4-aceleración A . Sin embargo, aún falta considerar la ecuación constitutiva para q_a .

8.7. Ecuaciones constitutivas causales

La ecuación de transporte “completa” a segundo orden en S^a dada por (8.13) se reduce para espacio-tiempos con simetría esférica a la siguiente ecuación de evolución para el escalar Q :

$$\dot{Q} = -Q \left(\frac{\theta}{3} - 2\Sigma \right) - \frac{\lambda}{\tau} (T' + TA) - \frac{Q}{\tau} (1 + \Psi) = 0, \quad (8.57)$$

donde Ψ es el último término del lado izquierdo de (8.13) (de modo que $\Psi = 0$ conduce a la ecuación truncada (8.14)):

$$\Psi = \frac{1}{2} \left[\dot{\tau} + \tau \left(\theta - \frac{\lambda}{\lambda} - \frac{2\dot{T}}{T} \right) \right]. \quad (8.58)$$

En términos de las variables (8.56), las ecuaciones (8.59) y (8.58) toman la forma

$$\dot{\epsilon} = 2(H - \Sigma)\epsilon - \frac{5}{2}\beta(\beta' + \beta A) - \frac{\epsilon}{\tau}(1 + \Psi), \quad (8.59)$$

$$\Psi = \tau \left[6H - \frac{\epsilon}{B^2} \left(\frac{B'}{B} + \frac{2Y'}{Y} + \frac{\epsilon'}{\epsilon} + \frac{\rho'}{\rho} + 2A \right) \right], \quad (8.60)$$

donde hemos utilizado la expresión que resulta de la Teoría Cinética para el coeficiente de conducción calorífica del gas idea no-relativista [4]

$$\lambda = \frac{5k}{2mc^2} \rho \beta \tau. \quad (8.61)$$

y sustituimos (8.44) y las ecuaciones de evolución (8.46)-(8.47) en (8.58). Como el lado izquierdo de (8.59) es idéntico al lado izquierdo de (8.48) (la ecuación de evolución del sistema 1+3 para el escalar $\epsilon = Q/\rho$), al igualar los lados derechos de ambas ecuaciones obtenemos el siguiente vínculo:

$$\begin{aligned} A \left[1 + \frac{5\beta}{2}(1 - \beta) + \frac{\epsilon^2}{\beta B^2} \right] + \epsilon \left[2 \left(\Sigma - \frac{2\theta}{3} \right) - \frac{1}{\tau} \right] + \beta \left[\ln(\rho \beta e^{-5\beta/2}) \right]' \\ + \frac{\epsilon^2}{\beta B^2} \left[\ln(BY^2 \epsilon \rho) \right]' + \frac{5}{2} \beta \beta' = 0, \end{aligned} \quad (8.62)$$

el cual define a A en términos de las variables térmicas (ρ , β , ϵ), cinemáticas (H , Σ), métricas (B , Y) y sus gradientes radiales (pero que no contiene derivadas convectivas temporales). El vínculo (8.62) nos permite eliminar a una de las ecuaciones (8.48) o (8.59). Como (8.48) es más sencilla que (8.59), podemos considerarla como la ecuación de evolución de ϵ (i.e. Q), en la cual A proporciona (a través de (8.62)) toda la información física contenida en la ecuación constitutiva (8.59).

Sustituyendo $\Psi = 0$ en (8.59) obtenemos la ecuación truncada de Maxwell–Cattaneo (8.14) para espacio–tiempos esféricamente simétricos:

$$\dot{\epsilon} = 2(H - \Sigma)\epsilon - \frac{5}{2}\beta(\beta' + \beta A) - \frac{\epsilon}{\tau}. \quad (8.63)$$

Si procedemos como lo hicimos anteriormente con la ecuación completa, igualando el lado derecho de (8.63) con el lado derecho de (8.48), obtenemos una expresión análoga a (8.62):

$$A \left[1 + \frac{5\beta}{2}(1 - \beta) \right] + \epsilon \left[2 \left(\frac{\theta}{3} + \Sigma \right) - \frac{1}{\tau} \right] + \beta [\ln(\rho\beta)]' + \frac{5}{2}\beta\beta' = 0, \quad (8.64)$$

la cual conduce también a un vínculo para definir A como función de variables térmicas (ρ , β , ϵ) y cinemáticas (H , Σ) y sus gradientes. Evidentemente, (8.64) es mucho menos complicado que (8.62), ya que no depende las variables métricas. Al igual que con la ecuación completa, podemos considerar a (8.48) como la ecuación de evolución para ϵ , en la cual A sustituida al resolver (8.64) confiere la información física contenida en (8.63).

Ya sea que utilicemos la ecuación constitutiva completa (8.59) o la truncada (8.63), sólo faltaría obtener o sugerir una forma funcional para el tiempo de relajación τ para que el sistema 1+3 quede completamente determinado. Este punto será tratado más adelante.

8.8. Ecuación completa vs ecuación truncada

El gas ideal no–relativista que hemos considerado es simplemente el gas ideal relativista asociado a la distribución de Jüttner [4, 5] en el régimen dado por la aproximación

$$\beta \ll 1, \quad (8.65)$$

la cual es válida ¹ en prácticamente cualquier contexto astrofísico en el que pueda ser aplicada la ecuación de estado (8.44): por ejemplo, para una masa nucleónica $m \sim 10^{-24}$ gm, y tomando en cuenta que $k = 1,38 \times 10^{-16}$ ergs/K, sería necesaria una temperatura de $T \sim 10^{13}$ K para que $\beta \sim 1$. Incluso en temperaturas de interiores estelares $T \sim 10^8$ K tenemos $\beta \sim 10^{-5}$.

Tomando en cuenta que (8.65) implica $e^{-5\beta/2} \approx 1$ y que nos permite despreciar los términos cuadráticos β^2 , los vínculos (8.62) y (8.64) toman las siguientes formas

$$A \left[1 + \frac{5\beta}{2} + \frac{\epsilon^2}{\beta B^2} \right] + \epsilon \left[2(\Sigma - 2H) - \frac{1}{\tau} \right] + \beta [\ln(\rho\beta)]' + \frac{\epsilon^2}{\beta B^2} [\ln(BY^2Q)]' + \frac{5}{2}\beta\beta' = 0,$$

¹ Sin embargo, la condición (8.65) no implica que los gradientes de temperatura β' sean cantidades pequeñas.

(8.66)

$$A \left[1 + \frac{5\beta}{2} \right] + \epsilon \left[2(H + \Sigma) - \frac{1}{\tau} \right] + \beta [\ln(\rho\beta)]' + \frac{5}{2}\beta\beta' = 0 \quad (8.67)$$

las cuales básicamente difieren por la presencia en (8.66) de los términos que contienen al coeficiente cuadrático ϵ^2/β , que debe ser una cantidad pequeña, pese a que (8.65) implica $1/\beta \gg 1$. Aunque la magnitud de ϵ^2/β en comparación con β depende de que tan cercana sea al estado de equilibrio la evolución del gas, las condiciones de procesos disipativos cercanos al equilibrio térmico implican necesariamente que $Q/\rho = \epsilon \ll 1$ y $Q/p \ll 1$, por lo que $\epsilon^2/\beta = (Q/\rho)(Q/p) \ll 1$ se debe cumplir. Sin embargo, la presencia de estos términos cuadráticos claramente indica que la ecuación constitutiva completa (8.59) es mucho más sensible a las desviaciones del equilibrio, por lo que su rango de aplicabilidad debe ser mucho más amplio: mientras que estos términos cuadráticos deben ser absolutamente despreciables muy cerca del equilibrio, en estados menos próximos al mismo podrían ser importantes aunque sean pequeños.

Mientras que la ecuación constitutiva completa se deriva rigurosamente al asumir una forma cuadrática covariante en S^a , la ecuación truncada de Maxwell–Cattaneo se obtiene “a mano” como una simplificación *ad hoc*, por lo que (como vimos anteriormente) debe tener menor versatilidad. Las condiciones en las que la ecuación truncada (8.63) es una buena aproximación a la ecuación completa (8.59) son descritas (comparando ambas ecuaciones) por

$$\Psi \ll 1. \quad (8.68)$$

las cuales, tomando en cuenta (8.60), se traducen en el cumplimiento de las siguientes dos condiciones:

$$(a): \quad \tau \ll \frac{1}{H} \quad \text{y} \quad (b): \quad \epsilon \ll 1. \quad (8.69)$$

Como mencionamos anteriormente, la condición (b) indica proximidad al equilibrio térmico, la cual es una condición usual en la Termodinámica relativista de procesos irreversibles. Sin embargo, la condición (b) es menos general, ya que implica que el tiempo de relajación de la señal disipativa sea mucho menor que el tiempo característico de la expansión del gas ($\sim 1/H$).

Tomando en cuenta que (a) en (8.69) también implica $\Sigma \ll 1/\tau$, si las dos condiciones (8.69) se cumplen, ambas ecuaciones constitutivas (8.59) y (8.63) toman la misma forma,

$$\dot{\epsilon} = -\frac{\epsilon}{\tau} - \frac{5}{2}\beta(\beta' + \beta A), \quad (8.70)$$

por lo que sus correspondientes vínculos (8.66) y (8.67) también coinciden en una sola expresión:

$$A \left[1 + \frac{5\beta}{2} \right] - \frac{\epsilon}{\tau} + \beta [\ln(\rho\beta)]' + \frac{5}{2}\beta\beta' = 0. \quad (8.71)$$

la cual proporciona el vínculo que determina A en el sistema 1+3 bajo condiciones compatibles con (8.68).

Es evidente que las condiciones (8.69) se cumplen (por lo que la ecuación truncada es válida) para un gas en evolución cercana al equilibrio y cuasi-newtoniana, ya que para un elemento de volumen $V \sim \ell^3$ tenemos $\Delta\ell/\Delta t \ll c$, lo que conduce a

$$H\Delta\tau \approx \frac{\Delta\ell}{\ell c} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \ll 1, \quad (8.72)$$

por lo que la condición (a) de (8.69) es válida para gases ideales en condiciones ambientales en los que el flujo de calor se da en forma estrictamente hidrodinámica a través de las colisiones de las partículas, lo cual justifica suponer que (al menos cualitativamente) $\Delta\tau$ es comparable a los tiempos de recorrido libre de éstas (que es muy breve en comparación con el tiempo característico de evolución Δt). El mismo criterio se puede aplicar a gases ideales en sistemas astrofísicos no-relativistas, tales como gases interestelar e intergaláctico, así como en varios sistemas en un contexto cosmológico (incluso relativistas).

En un contexto cosmológico (más o menos equivalente a un laboratorio en expansión) existen situaciones específicas (en condiciones relativistas) en las que el flujo de calor también se da a través de colisiones caracterizadas por tiempos de colisión menores que el tiempo característico de expansión cósmica (inverso del factor de Hubble) que es proporcional a $1/H = 3/\theta$, por lo que las condiciones (8.69) se cumplen.

Sin embargo, el punto principal que vale la pena remarcar es que hay situaciones en las que la ecuación truncada (8.59) no es una buena aproximación. En particular, esto sucede cuando se viola la condición (a) en (8.69) en un contexto cosmológico y en sistemas astrofísicos relativistas, tales como supernovas o núcleos activos galácticos. De hecho, es importante remarcar que las mismas condiciones para la validez de las ecuaciones constitutivas truncadas han sido deducidas para la viscosidad volumétrica (ver reseña en [4]) y para la viscosidad de corte (“shear”) en [12, 15, 16]. Dichos trabajos también identifican las condiciones en las que estas ecuaciones no son válidas.

8.9. El tiempo de relajación

Tomando en cuenta que los vínculos (8.62) y (8.64) (así como sus formas aproximadas) determinan A , aún falta obtener una forma funcional para τ para que el sistema 1+3 dado por (8.45)–(8.39) (más los vínculos (8.40)–(8.43)) quede completamente determinado. Aunque τ es una cantidad mesoscópica que no puede ser obtenida como una función analítica de los potenciales termodinámicos, es posible inferir formas aproximadas o “funciones de prueba” en base a argumentos físicamente plausibles [3, 5, 10] (ver tratamiento numérico de diferentes “funciones de prueba” en [12]).

La conducción de calor hidrodinámica se da a través de colisiones. Aunque τ no es igual al tiempo de colisión t_{coll} , es posible suponerlo como proporcional a éste, al menos del mismo orden de magnitud. Como mencionamos en la sección anterior, la conducción de calor mediante colisiones sucede en condiciones ambientales cuasi-estáticas en condiciones compatibles con la ecuación truncada (8.63), sin embargo, hay condiciones en las que es necesario utilizar la ecuación completa (8.59). A continuación examinamos diferentes escenarios físicos:

8.9.1. Contexto cosmológico

La Cosmología proporciona un ejemplo muy útil para ilustrar la conducción de calor hidrodinámica: la era radiativa en la que la radiación y la materia visible están térmicamente acopladas, formando un plasma radiativo en el que se puede identificar varias interacciones colisionales [24]. Dicho plasma puede ser descrito como un fluido hidrodinámico cuasi-homogeneo y cercano al equilibrio térmico, cuya ecuación de estado no es (8.44), sino la de una mezcla interactiva de bariones y fotones:

$$\mu = m_b c^2 n_b \left(1 + \frac{3}{2} \beta_b\right) + m_e c^2 n_e \left(1 + \frac{3}{2} \beta_e\right) + a_0 T^4, \quad (8.73)$$

$$p = m_b c^2 n_b \beta_b + m_e c^2 n_e \beta_e + \frac{1}{3} a_0 T^4, \quad (8.74)$$

donde los subíndices b y e corresponden a bariones y electrones, $\beta_b = kT/(m_b c^2)$, $\beta_e = kT/(m_e c^2)$, a_0 es la constante de Steffan–Boltzmann y T es la temperatura común de la mezcla. Para obtener el sistema 1+3 asociado a esta mezcla es necesario sustituir la ecuación de estado (8.73)–(8.74) en las ecuaciones dinámicas (8.34)–(8.43).

Considerando que el factor de Hubble, $H^{-1} = 3/\theta$, proporciona una medida covariante de las escalas de longitud y tiempo características de la expansión cósmica, la condición necesaria para la existencia de los procesos radiativos es $t_{\text{coll}} < 1/H$. Como podemos suponer que t_{coll} debe estar correlacionado con τ , podemos expresar esta condición como

$$c t_{\text{coll}} \approx \frac{1}{n \sigma_0} \approx c \tau < \frac{1}{H}, \quad (8.75)$$

donde σ_0 es la sección eficaz ($\sim 10^{-25} \text{cm}^{-2}$ para la dispersión de Thomson). El tiempo de colisión de otros procesos radiativos toma una forma análoga con diferentes secciones eficaces.

Es importante remarcar que si suponemos que $\tau \approx t_{\text{coll}}$, entonces la condición (a) de (8.69) se cumple al inicio de la era radiativa, lo cual es compatible con (8.75). Mientras que se cumpla $t_{\text{coll}} \ll 1/H$ el fluido radiativo estará cercano al equilibrio, por lo que también se cumple la condición (b) de (8.69) y podemos utilizar la ecuación constitutiva truncada (8.63). Sin embargo, como t_{coll} y $1/H$ siguen diferentes leyes de evolución, conforme procede la expansión cósmica t_{coll} debe “alcanzar” a $1/H$ (aunque se siga cumpliendo (8.75) para que pueda existir la interacción colisional). Esto sucede hasta que ocurre el “congelamiento” de las colisiones en un tiempo t_{freeze} en el cual:

$$c t_{\text{coll}} \approx c \tau \approx \frac{1}{H}, \quad (8.76)$$

de modo que los componentes de la mezcla radiativa se desacoplan y la descripción hidrodinámica deja de ser válida para tiempos cósmicos $t > t_{\text{freeze}}$, en los cuales la conducción de calor como fenómeno térmico disipativo pierde sentido en la ausencia de colisiones. Es evidente que la desviación del equilibrio térmico es mucho mayor en las interacciones en tiempos cercanos pero anteriores a t_{freeze} , en los cuales se cumple aproximadamente (8.76). Por lo tanto, para estos tiempos se viola (al menos) la condición (a) de (8.69), por lo que para estos tiempos cósmicos la

ecuación truncada (8.63) no es válida. Sin embargo, como esta última es un caso particular de la ecuación completa (8.59), el procedimiento correcto es utilizar la ecuación completa para describir las condiciones dadas por (8.75) y (8.76) en toda la era radiativa. Este resultado ha sido obtenido también con modelos analíticos para la viscosidad de corte [15, 16].

El proceso hidrodinámico descrito anteriormente también es aplicable a un gas de partículas masivas, no-relativistas, débilmente interactuantes (WIMPS) que evoluciona desde un estado cercano al equilibrio hacia su desacople cuando se cumple la condición (8.76). Dicho gas puede ser descrito correctamente por la ecuación de estado (8.44) y es un modelo popular de la materia oscura fría. En [16] se examina el proceso hidrodinámico de un gas de WIMPS para la viscosidad de corte (shear).

8.9.2. Explosión de una supernova.

La conducción de calor también puede ocurrir mediante la difusión (o transporte) radiativa de uno de los componentes de una mezcla de gases, en particular un componente como los neutrinos que fluyen hacia afuera del núcleo estelar a velocidades relativistas o ultra-relativistas (“free streaming”) con recorridos libres medios grandes. Esto sucede en el contexto de una supernova, en el cual tenemos una mezcla interactiva de bariones, electrones, fotones y neutrinos que puede ser descrita por una ecuación de estado similar a (8.73)–(8.73), pero con los neutrinos tomando el lugar de los fotones. La conducción de calor para esta mezcla es principalmente debida a las colisiones durante el flujo relativista de los neutrinos, no a las colisiones entre los demás partículas [8, 9, 25], por lo tanto, el tiempo de relajación relevante a la conducción de calor es τ_ν , que es proporcional a los tiempos colisión largos t_ν d e las interacciones de los neutrinos (con electrones y nucleones), y no guarda relación alguna con los tiempos de colisión cortos t_{coll} de las interacciones entre las otras partículas. Se cumplen entonces las siguientes condiciones

$$\tau_\nu \approx t_\nu, \quad \beta_\nu \approx 1, \quad (8.77)$$

donde $\beta_\nu = kT_\nu/(mc^2)$ se refiere a los neutrinos, que son partículas muy relativistas. Para modelar este problema se considera el coeficiente de conducción calorífica de una mezcla radiativa de partículas relativistas (neutrinos) y no-relativistas:

$$\lambda = \frac{4}{3}a_0bT^3c^2t_\nu. \quad (8.78)$$

donde $b = (7/8)N_\nu$, siendo N_ν el “sabor” de la especie de neutrino. Para τ_ν es posible sugerir formas empíricas tales como [8, 9, 25]

$$c\tau_\nu = \frac{\xi}{H}, \quad (8.79)$$

donde $1/H$ proporciona la escala de longitud (o tiempo) del flujo de la mezcla de materia y neutrinos, no de la expansión cósmica, mientras que ξ es una función “de prueba” que depende de las variables térmicas. En particular se suele proponer [8, 9, 25] la ley de potencias: $\xi \sim T^{-\omega}$, donde ω es una constante arbitraria que puede ser ajustada para describir el régimen difusivo.

8.10. Ecuaciones constitutivas como vínculos

La ecuación constitutiva (8.13) y su versión truncada de Maxwell–Cattaneo (8.14) tienen la estructura de ecuaciones de evolución, por lo que se acoplan en forma natural a las ecuaciones dinámicas del formalismo 1+3, proporcionando un vínculo para la 4–aceleración. Ecuaciones constitutivas dadas como un vínculo que define a Q conducen a una ecuación de evolución sumamente complicada para A , lo cual obedece al hecho de que suelen ser aproximaciones válidas en ciertas condiciones o casos límite.

8.10.1. Ecuaciones constitutiva de Eckart

Aunque la ecuación constitutiva de Eckart (8.10) viola el criterio de causalidad, es interesante examinar como se podría acoplar al formalismo 1+3. Esta ecuación no tiene la estructura de una ecuación de evolución, sino la forma matemática de un vínculo:

$$\epsilon = -\frac{5}{2}\beta^2 c\tau \left(\frac{\beta'}{\beta} + A \right), \quad (8.80)$$

donde hemos supuesto dependencia funcional de λ en (8.61). La consistencia con el sistema 1+3 requiere sustituir (8.80) en (8.48), lo cual conduce a la siguiente ecuación:

$$-\frac{5}{2}\beta^2 c\tau \left[\frac{2\dot{\beta}}{\beta} + \frac{\dot{\tau}}{\tau} + \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} \right)' + \dot{A} \right] = -\beta \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\beta'}{\beta} \right) - \left(1 + \frac{3}{2}\beta \right) A, \quad (8.81)$$

la cual proporciona una ecuación de evolución para A una vez que se sustituye una forma funcional para τ (como por ejemplo (8.75) o (8.79)) y se eliminan los términos $\dot{\beta}$ y β' usando la ecuación de evolución (8.47). Sin embargo, (8.81) es en realidad una ecuación sumamente complicada debido a que al evaluar $\dot{\beta}'$ es necesario obtener los gradientes del término que multiplica a ϵ en (8.47). Esta complejidad obedece al hecho de que la ecuación de Eckart es adecuada para un régimen cuasi–newtoniano, por lo que se obtiene un resultado un tanto artificial al acoplarla a un sistema completamente relativista como (8.45)–(8.51).

No es difícil mostrar que la ecuación constitutiva de Eckart (8.80) es una aproximación adecuada al régimen cuasi–newtoniano. En dicho régimen el coeficiente métrico N toma la forma

$$N \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2}, \quad \frac{\phi}{c^2} \ll 1 \quad (8.82)$$

donde ϕ es el potencial gravitacional newtoniano, por lo que podemos escribir la ecuación de Eckart (8.80) como

$$\epsilon = -\frac{5}{2}\beta^2 c\tau \left(\frac{\beta'}{\beta} + \frac{2\phi'}{c^2} \right), \quad (8.83)$$

donde usamos el hecho de que $A = N'/N \approx 2\phi'/c^2$. Como en este régimen las derivadas temporales son despreciables en comparación con las mismas cantidades y los gradientes espaciales,

tenemos

$$c\tau\dot{\epsilon} \approx \tau \frac{\Delta\epsilon}{\Delta t} \ll \epsilon, \frac{\beta'}{\beta}, \frac{2\phi'}{c^2}, \quad (8.84)$$

por lo que las ecuaciones causales (8.59) y (8.63) se reducen a (8.80). Es conveniente remarcar que aunque $\beta \rightarrow 0$ y $\tau \rightarrow 0$ son condiciones suficientes para $\epsilon = 0$, éstas son condiciones matemáticas, ya que estas variables no son estrictamente cero, incluso en procesos cuasi-newtonianos, por lo que la condición física para $\epsilon = 0$ es el vínculo conocido por la ley de Tolman:

$$\frac{\beta'}{\beta} + A \approx \frac{\beta'}{\beta} + \frac{2\phi'}{c^2} = 0, \quad (8.85)$$

la cual es consistente con la Teoría Cinética del gas ideal no-relativista en equilibrio térmico [4, 5]. El tratamiento dinámico adecuado para fluidos conductores de calor con esta última ecuación constitutiva debe ser llevado a cabo con el sistema 1+3 en la aproximación post-newtoniana del mismo, lo cual no haremos en el presente artículo.

8.10.2. La ecuación constitutiva de Sandoval *et al.*

Sandoval, García-Persiante y García-Colín han derivado [22] una ecuación constitutiva causal, obtenida mediante el formalismo de Chapman-Enskog en el contexto de la Teoría Cinética Relativista del gas ideal clásico relativista (distribución de Jüttner) en condiciones cercanas al equilibrio térmico. Esta ecuación constitutiva también tiene la estructura de un vínculo algebraico, pero que (en contraste con (8.80)) no depende de la 4-aceleración:

$$\epsilon = -\beta^2\tau \left[L_1(\beta) \frac{\beta'}{\beta} + L_2(\beta) \frac{\rho'}{\rho} \right], \quad (8.86)$$

donde $L_1(\beta)$ y $L_2(\beta)$ están definidas por las ecuaciones (19)–(21) de [22] en términos de complicadas expresiones que involucran funciones de Bessel. En un régimen no-relativista $\beta \ll 1$ (el cual es consistente con la ecuación de estado (8.44)), y considerando términos hasta orden $O(\beta)$, estas expresiones son: $L_1 \approx 5/2 + 5\beta/4 + O(\beta^2)$ y $L_2 \approx -5\beta/2 + O(\beta^2)$, por lo que (8.86) toma la forma

$$\epsilon = -\frac{5}{2}\beta^2\tau \left[\left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \frac{\beta'}{\beta} - \beta \frac{\rho'}{\rho} \right], \quad (8.87)$$

la cual al ser sustituida en (8.48) conduce a:

$$\begin{aligned} -\frac{5}{2}\beta^2c\tau \left[\frac{\dot{\tau}}{\tau} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} \left(2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta\rho'}{\rho}\right) + \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)' - \beta \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)' \right] \\ = -\beta \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\beta'}{\beta}\right) - \left(1 + \frac{3}{2}\beta\right) A, \end{aligned} \quad (8.88)$$

que es un vínculo para A una vez que sustituimos una forma funcional para τ y eliminamos las derivadas $\dot{\beta}$, $\dot{\beta}'$, $\dot{\rho}$, $\dot{\rho}'$ mediante las ecuaciones de evolución (8.46) y (8.47). Al igual que la ecuación (8.81) que surge de la ecuación de Eckart, la ecuación (8.88) conduce a una expresión muy

8.11. Integración del sistema 1+3

complicada para A (aunque ahora es un vínculo). Sin embargo, la ecuación constitutiva (8.86) puede ser una aproximación válida en un límite de campo débil asociado a Relatividad Especial, en el cual los gradientes espaciales son despreciables en comparación con las derivadas temporales, por lo que (8.47) se reduce aproximadamente a:

$$\dot{\beta} \approx -2\beta H, \quad (8.89)$$

y por lo tanto, (8.88) pasa a ser

$$-\frac{5}{2}\beta^2 c\tau \left[\frac{\dot{\tau}}{\tau} - 2H \left(2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta\rho'}{\rho} \right) - 2H'(1-\beta) \right] = -\beta \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\beta'}{\beta} \right) - \left(1 + \frac{3}{2}\beta \right) A, \quad (8.90)$$

lo cual representa un vínculo mucho menos complicado que (8.88). El tratamiento dinámico de la conducción de calor de un gas ideal bajo la ecuación constitutiva (8.86) tendría que ser realizado en la aproximación de campo débil relativista, lo cual no haremos en el presente artículo.

8.11. Integración del sistema 1+3

La integración numérica del sistema 1+3 dado por (8.45)–(8.55) no requiere métodos numéricos sofisticados, ya que las derivadas temporales y espaciales están efectivamente desacopladas. Para llevar a cabo este proceso de integración numérica, necesitamos primeramente transformar todas las variables en cantidades adimensionales. Como β , ϵ , B , N ya son adimensionales, redefinimos las variables dimensionales ρ , H , Σ , A , Y , M , τ de la siguiente forma

$$\Omega = \frac{\kappa\rho}{3h_s^2}, \quad \mathcal{H} = \frac{H}{h_s}, \quad \mathcal{S} = \frac{\Sigma}{h_s}, \quad \mathcal{A} = \frac{A}{h_s}, \quad y = h_s Y, \quad m = h_s M, \quad \zeta = h_s c\tau, \quad (8.91)$$

donde h_s es una constante arbitraria con unidades de longitud inversa ($[h_s] = \text{cm}^{-1}$) que define una longitud característica. También necesitamos utilizar coordenadas temporal y radial adimensionales:

$$\eta = h_s ct, \quad \chi = h_s r, \quad (8.92)$$

con lo cual transformamos las ecuaciones de evolución (8.45)–(8.51) en las siguientes ecuaciones adimensionales:

$$\frac{\mathcal{H},\eta}{N} = -\mathcal{H}^2 - \frac{\Omega}{2} \left(1 + \frac{9}{2}\beta\right) - 2\mathcal{S}^2 + \frac{\mathcal{A}}{3B^2} \left[\frac{2y_{,x}}{y} - \frac{B_{,x}}{B} + \frac{\mathcal{A}_{,x}}{\mathcal{A}} + \mathcal{A}\right], \quad (8.93)$$

$$\frac{\Omega,\eta}{N} = -3\mathcal{H}\Omega, \quad (8.94)$$

$$\frac{\beta,\eta}{N} = -2\mathcal{H}\beta + \frac{2\epsilon}{3B^2} \left(\frac{B'}{B} + \frac{2y_{,x}}{y} + \frac{\Omega_{,x}}{\Omega} + \frac{\epsilon_{,x}}{\epsilon} + 2\mathcal{A}\right), \quad (8.95)$$

$$\frac{\epsilon,\eta}{N} = -\beta \left(\frac{\Omega_{,x}}{\Omega} + \frac{\beta_{,x}}{\beta}\right) - \left(1 + \frac{5}{2}\beta\right) \mathcal{A}, \quad (8.96)$$

$$\frac{\mathcal{S},\eta}{N} = -2\mathcal{H}\mathcal{S} + \mathcal{S}^2 - \frac{m}{y^3} + \frac{\Omega}{2} \left(1 + \frac{3}{2}\beta\right) + \frac{\mathcal{A}}{3B^2} \left[\frac{B_{,x}}{B} + \frac{y_{,x}}{y} - \frac{\mathcal{A}_{,x}}{\mathcal{A}} - \mathcal{A}\right], \quad (8.97)$$

$$\frac{y,\eta}{N} = y(\mathcal{H} + \mathcal{S}), \quad (8.98)$$

$$\frac{B,\eta}{N} = B(\mathcal{H} - 2\mathcal{S}), \quad (8.99)$$

mientras que los vínculos (8.52)–(8.55) toman la forma

$$\mathcal{S}_{,x} = -3\mathcal{S} \frac{y_{,x}}{y} - \mathcal{H}_{,x} + \frac{3}{2}\Omega\epsilon = 0, \quad (8.100)$$

$$m = \frac{y}{2} \left[y^2 (\mathcal{H} + \mathcal{S})^2 + 1 - \frac{y_{,x}^2}{B^2} \right], \quad (8.101)$$

$$m_{,x} = \frac{3}{2}\Omega \left(1 + \frac{3}{2}\beta\right) y^2 y_{,x} + \frac{3}{2}\Omega\epsilon (\mathcal{H} + \mathcal{S}) y^3, \quad (8.102)$$

$$N_{,x} = N\mathcal{A}, \quad (8.103)$$

$$\mathcal{A} = \frac{\epsilon/\zeta - \beta [\ln(\Omega\beta)]_{,x} - (5/2)\beta\beta_{,x}}{1 + (5/2)\beta}, \quad (8.104)$$

donde la expresión para \mathcal{A} en (8.104) viene del vínculo (8.71) que resulta de las ecuaciones de transporte (8.59) y (8.63) cuando las condiciones (8.69) son válidas (evidentemente, podríamos haber considerado el vínculo (8.62) que es más general y más complicado). Podemos suponer (por simplicidad) que el tiempo de relajación (ζ) es igual a un tiempo de colisión dado por (8.75) con una sección eficaz dada, por lo que

$$\zeta = \frac{1}{h_s \sigma_0 n} = \frac{K}{\Omega}, \quad K = \frac{\kappa m c^2 / (3h_s)}{\sigma_0} = \frac{8\pi G m / (3c^2 h_s)}{\sigma_0}, \quad (8.105)$$

donde K proporciona una relación entre la escala característica h_s , la masa y sección eficaz del proceso colisional.

8.11.1. Condiciones iniciales

El sistema (8.93)–(8.105) está completamente determinado. Para su integración necesitamos prescribir condiciones iniciales dadas por las variables \mathcal{H} , Ω , β , ϵ , \mathcal{S} , \mathcal{A} , y , B , m , N evaluadas en una hipersuperficie marcada por un tiempo inicial arbitrario $\eta = \eta_0$, el cual puede ser dado sin perder generalidad por $\eta = 0$ (el subíndice $_0$ denotará evaluación en $\eta = 0$). Para tal efecto, y considerando los vínculos (8.100)–(8.105), es evidente que sólo es necesario prescribir las funciones iniciales:

$$\mathcal{H}_0(\chi), \quad \Omega_0(\chi), \quad \beta_0(\chi), \quad \epsilon_0(\chi), \quad (8.106)$$

ya que las demás funciones iniciales se obtienen a partir de (8.100)–(8.104), una vez que hagamos una elección de la coordenada radial (que siempre es posible re–definir). En particular, es conveniente definir esta coordenada tal que $Y = r$, o en términos de (8.91):

$$y_0(\chi) = \chi. \quad (8.107)$$

Teniendo a la mano (8.105), (8.106) y (8.107), obtenemos directamente $\mathcal{A}_0(\chi)$ por medio de (8.104), para obtener inmediatamente después $N_0(\chi)$ por integración de (8.103) en $\eta = 0$. El siguiente paso es obtener $\mathcal{S}_0(\chi)$ resolviendo la ecuación diferencial (8.100), con lo cual podemos después integrar (8.102) para obtener $m_0(\chi)$. Por último, la comparación de la forma obtenida de $m_0(\chi)$ con la que surge de (8.101) conduce a una ecuación algebraica para obtener $B_0(\chi)$. Una vez obtenidas las funciones iniciales, la integración del sistema puede ser llevada a cabo mediante el método RungeKutta a 4–5 orden para derivadas temporales y el método de derivadas finitas para los vínculos. Este trabajo se encuentra en proceso de elaboración y será sometido a publicación en el futuro cercano.

8.12. Comentarios finales

Hemos examinado en este artículo la evolución dinámica de fluidos auto–gravitantes conductores de calor en el marco de la teoría de la Relatividad General. Consideramos, en vez de las ecuaciones de Einstein, a un sistema equivalente de primer orden: las ecuaciones evolución del formalismo 1+3, basado en cantidades covariantes asociadas a propiedades cinemáticas y físicas de los fluidos que se definen en forma covariante con respecto a los tensores u^a y T^{ab} . Aplicamos este formalismo a un gas ideal no–relativista con simetría esférica y consideramos varias ecuaciones constitutivas para el flujo de calor que han sido discutidas en la literatura: la ecuación causal de Israel–Stewart (o de la Termodinámica Extendida) [1, 2, 3, 4, 5], cuya estructura es de una ecuación de evolución y construida con una corriente de entropía de segundo orden en el flujo de calor, así como las ecuaciones constitutivas a dadas como vínculos (la de Eckart [4] y la de Sandoval *et al* [22]). Exploramos el acoplamiento de las ecuaciones dinámicas del sistema 1+3 con estas ecuaciones constitutivas y examinamos las consecuencias dinámicas de estas últimas, tanto en un contexto cosmológico como en condiciones ambientales y en modelos de explosión de una supernova. Es evidente que el acoplamiento al sistema 1+3 es más directo y natural para las ecuaciones constitutivas de Israel–Stewart que para las ecuaciones constitutivas de Eckart y Sandoval *et al*. lo cual se

debe a que estas últimas sólo son adecuadas en los límites de campo débil (newtoniano y de Relatividad Especial). Por último, hemos descrito la definición de las condiciones iniciales y propuesto una estrategia para la integración numérica del sistema 1+3. Aunque nos hemos concentrado en el gas ideal no-relativista, la metodología que hemos seguido es fácilmente aplicable a cualquier otra ecuación de estado térmica, por lo que esperamos en el futuro aplicar el contenido del presente artículo para integrar numéricamente las ecuaciones dinámicas acopladas a una ecuación constitutiva adecuada para varios sistemas térmicos de interés astrofísico y cosmológico.

Agradecimientos

El autor agradece apoyo financiero del proyecto SEP-CONACYT 132132.

Bibliografía

- [1] D. Jou, J. Casas-Vázquez, and G. Lebon, *Extended Irreversible Thermodynamics*, Springer, Berlin, second edition, 1996.
- [2] W. Israel *Ann. Phys. (N.Y.)*, **110**, 310 (1976); W. Israel and I. Stewart, *Ann. Phys. (N.Y.)*, **118**, 341, (1979); N. Udey and W. Israel, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **199**, 1137, (1982); W. Hiscock and L. Lindblom, *Contemporary Mathematics*, **71**, 181 (1982); W. Israel “Relativistic Fluid Dynamics” in *Lectures given at the 1st 1987 Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.)* edited by A. Anile and Y. Choquet–Bruhat, Series: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1385, Springer, Berlin, 1989.
- [3] L. Herrera and D. Pavón, *Physica A*, **307**, 121-130, (2002); L. Herrera and D. Pavón, *Phys. Rev. D*, **64**, 088503, (2001).
- [4] R. Maartens, “Causal Thermodynamics in Relativity”, in *Hanno Rund Workshop on Relativity and Thermodynamics*, Natal University, Durban, June 1996 (*Preprint arXiv:astro-ph/9609119*).
- [5] N. Andersson and L. Comer, “Relativistic Fluid Dynamics: Physics for Many Different Scales” (chapter 14) <http://www.livingreviews.org/lrr-2007-1>
- [6] A. Krasinski, *Inhomogeneous Cosmological Models*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [7] N. O. Santos, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **216**, 403, (1985); C. A. Kolassis, N. O. Santos and D. Tsoubelis, *Astroph. J.*, **327**, 755, (1988); W. B. Bonnor, A. K. G. Oliveira and N. O. Santos, *Phys. Rep.*, **181**, 269, (1989); R. A. Sussman, *Class Quant. Grav.*, **10**, 2675-90, (1993);

- [8] M. Govender, S. Maharaj and R. Maartens, *Class.Quant.Grav.*, **15**, 323, (1998); M. Govender, R. Maartens and S. Maharaj, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **310**, 557 (1999); R. Maartens, M. Govender and S. Maharaj, *Gen.Rel.Grav.*, **31**, 815-819, (1999)
- [9] M. Govender and K. S. Govinder, *Phys. Lett. A*, **283**, 71 (2001); M. Govender *et al*, *Int. J. Mod. Phys. D*, **12**, 667, (2003);
- [10] N. Andersson and C. López Montalvo, *Class. Quantum Grav.*, **28**, 195023, (2011).
- [11] V. Romano and D. Pavón, *Phys. Rev. D*, **50**, 2572, (1994); A. A. Coley, R. J. van den Hoogen and R. Maartens *Phys.Rev. D*, **54**, 1393-1397 (1996); R. J. van den Hoogen and A. A. Coley, *Class. Quant. Grav.*, **12**, 2335, (1995); A. A. Coley and R. J. van den Hoogen *Class. Quant. Grav.*, **12**, 1977, (1995); A. Di Prisco, L. Herrera and M. Esculpi *Class. Quantum Grav.*, **13**, 1053, (1996);
- [12] A. A. Coley, A. Sarmiento and R. A Sussman *Phys.Rev. D*, **66**, 124001 (2002)
- [13] R. A Sussman, *Class. Quant. Grav.*, **15**, 1759-66, (1998); R. A Sussman and J. Triginer, *Class. Quant. Grav.*, **16**,167-187, (1999);
- [14] R. A Sussman and R. A Sussman, *Phys. Rev. D*, **60**, 104023, (1999); R. A Sussman and M. Ishak, *Gen.Rel.Grav.*, **34**, 1589-1610, (2002)
- [15] D. Pavón and R. A Sussman, *Class.Quant.Grav.*, **18**, 1625-1636, (2001).
- [16] R. A Sussman, “Shear viscosity, relaxation and collision times in spherically symmetric spacetimes” in *Casimir effect and Cosmology*, edited by S. D. Odintsov, E. Elizalde and O. G. Gorbunova, Scientific Editors, TSPU Publishing Company, TSPU, Tomsk, 2008, E-print arXiv:0812.4430
- [17] J. Ehlers, *Gen. Rel. Gravit.*, **25**, 1225 (1993),
- [18] G. F. R. Ellis “Cosmological Models” in *Cargèse Lectures 1998*, NATO Adv Study Inst Ser C Math Phys Sci **541** 1-116, (1999). E-print arXiv:gr-qc/9812046v5
- [19] G. F. R. Ellis and M. Bruni, *Phys. Rev. D*, **40**, 1804, (1989); M. Bruni, P. K. S. Dunsby and G. F. R. Ellis, *Astroph. J.*, **395**, 34–53, (1992);
- [20] G. F. R. Ellis and H. van Elst “Cosmological Models” in *Cargèse Lectures 1998*, E-print arXiv gr-qc/9812046 v4.
- [21] C. G. Tsagas, A. Challinor and R. Maartens, *Phys Rep*, **465**, 61–147, (2008), E-print arXiv:0705.4397.
- [22] A. Sandoval–Villalbaz, A. L. García–Persiante and L. S. García–Colín, *Phys. Lett. A*, **388**, 3765–3770 (2009).

- [23] S. A. Hayward *Phys. Rev. D*, **53** 1938, (1996); S. A. Hayward, *Class Quant. Grav.*, **15**, 3147–3162, (1998).
- [24] E. W. Kolb and M. S. Turner *The Early Universe*, Addison-Wesley, Reading, MA, (1990); T. Padmanabhan *Theoretical Astrophysics, Volume III: Galaxies and Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, (2002).
- [25] J. Martínez, *Phys. Rev. D*, **53**, 6921, (1996); L. Herrera and J. Martínez, *Gen. Rel. Gravit.*, **30**, 445, (1998).

¿Cómo alimentar agujeros negros con un apetito feroz?

Discos de acreción enfriados por neutrinos

William H. Lee

Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México

Apdo. Postal 70-264, México D.F. 04510, México.

wlee@astro.unam.mx

Resumen

La energía gravitacional liberada durante procesos de acreción sobre objetos compactos provee la luminosidad que hace brillar algunas de las fuentes más poderosas en el Universo. Su estudio, en términos de morfología, el contexto de la población de progenitores, la hidrodinámica y la ecuación de estado en distintas condiciones de densidad y temperatura, es relevante si queremos comprenderlas mejor. Aquí presento una revisión de lo que sucede en particular cuando sistemas compactos acretan a ritmos tan elevados, el llamado régimen hipercrítico, que la principal fuente de enfriamiento son los neutrinos emitidos en el fluido, ya sea por reacciones térmicas, o por interacciones débiles. Estos discos probablemente producen los destellos de rayos gamma cosmológicos, uno de los fenómenos más estudiados en astrofísica de altas energías en los últimos 40 años, y podrían también producir las fuentes más brillantes en ondas gravitacionales, en principio detectables en la próxima década.

9.1. Introducción

Las estrellas pasan la mayoría de su vida sobre la secuencia principal, identificada inicialmente por Hertzsprung y Russell (ver por ej. Kippenhahn & Weigert 1994). En esta etapa, la generación de energía en sus interiores debida a la combustión de Hidrógeno en Helio evita el colapso gravitacional. Lo que sucede al agotarse el Hidrógeno en las regiones internas de la estrella depende esencialmente de su masa inicial. Para estrellas con masas menores a 8 masas solares, se sucede un ciclo de oscilaciones de la estrella. Cada ciclo inicia con la ignición de un nuevo combustible, y termina al agotarse. De Hidrógeno se pasa al Helio, luego al Carbono y al Oxígeno. Al concluir las reacciones, el núcleo de estas estrellas se sostiene contra el colapso gravitacional mediante la presión de degeneración de los electrones. Este mecanismo fue identificado por S. Chandrasekhar en 1931, y llevo a la realización de que deben existir objetos extremadamente densos ($\rho \simeq 10^7 \text{g cm}^{-3}$) en el universo, producto de las etapas más avanzadas de la evolución estelar. El primer objeto de este tipo en ser identificado fue Sirius B, con una masa de $0.9 M_{\odot}$ y un radio de 5000 km. A esta clase de estrellas se les conoce como Enanas blancas (EB). La ecuación de estado de la materia a las densidades relevantes al estudio de las EB se conoce con precisión, incorporando correcciones debidas a la relatividad general, a la mecánica cuántica y a los detalles de la composición química de la estrella.

En el caso de las EB, existe una masa límite (conocida como la masa límite de Chandrasekhar), más allá de la cual la presión de degeneración de los electrones es incapaz de evitar el colapso gravitacional de la estrella. Este límite es $M_{Ch} \simeq 1.4M_{\odot}$. Las estrellas que inicialmente poseen una masa menor a 8 masas solares en la secuencia principal dan lugar a núcleos de C, O de menos de 1.4 masas solares, ya que las reacciones nucleares mencionadas arriba requieren de cada vez mayor temperatura para producirse (que a su vez requieren de una mayor masa). Si la estrella tiene inicialmente más de 8 masas solares, las reacciones nucleares prosiguen más allá del Oxígeno, y se va formando un núcleo de Néon, seguido por Magnesio, Silicio, y Hierro. El Hierro es el elemento más estable, y fusionarlo constituye una reacción endotérmica, por lo que al constituirse en el centro de la estrella un núcleo de hierro con masa superior a M_{Ch} , la estrella colapsa, pudiendo producir una explosión de supernova (Mezzacappa & Fuller 2006). En el centro se llega a densidades superiores a la nuclear ($\rho_{nuc} \simeq 10^{14} \text{g cm}^{-3}$) y puede formarse una Estrella de neutrones (EN). Las capas exteriores de la estrella rebotan sobre el núcleo y son eyectadas al medio interestelar en una explosión de supernova. Una EN es similar a una EB, sólo que el mecanismo que proporciona la presión es la repulsión nuclear. Los neutrones y protones están en condiciones de degeneración, y como son 1800 veces más masivos que los electrones, las EN son mucho más compactas, con densidades del orden de ρ_{nuc} , masas del orden de una masa solar y radios del orden de 10 km. Las EN fueron propuestas teóricamente en 1934 por Baade y Zwicky, pero la confirmación observacional de su existencia no llegó sino hasta 1967, cuando fueron descubiertas por Bell y Hewish. Hoy en día se conocen más de 2000 estrellas de neutrones en nuestra galaxia, principalmente bajo la forma de pulsares (Lorimer 2008).

La ecuación de estado para las EN no se conoce con tanta precisión como en el caso de las EB, pero existe también una masa límite más allá de la cual la presión de degeneración de los neutrones

es incapaz de evitar el colapso. Hoy en día se estima que $M_{max} \simeq 2 - 3M_{\odot}$, y esto es objeto de estudio intenso por grupos que combinan conocimientos de física nuclear, relatividad general y astrofísica (Lattimer & Prakash 2007, 2010)

Para estrellas que derivan en un remanente central con masa superior al límite para una estrella de neutrones, el colapso lleva a la formación de un Agujero Negro (AN). La idea de la existencia de los agujeros negros se remonta por lo menos a las ideas de Laplace, quien los propuso en un contexto Newtoniano. Después de la formulación de la teoría de la relatividad general en 1915 por Einstein, K. Schwarzschild propuso en 1916 una solución para un sistema con simetría esférica, estático. Ésta contenía la solución al problema externo a una distribución de materia, sin rotación ni cargas eléctricas, que hoy conocemos como la métrica de Schwarzschild. Los primeros estudios de colapso gravitacional se deben a Oppenheimer y Snyder (1939), quienes estudiaron la contracción de una nube de polvo sin presión. En realidad no fue sino hasta los 60s que se empezó a estudiar de manera seria a los agujeros negros como objetos reales, y sólo recibieron su nombre en 1968 (debido a J.A. Wheeler).

La evidencia en favor de la existencia de los agujeros negros es necesariamente indirecta, pero hoy en día es comunmente aceptado que estos objetos existen, en una gran variedad de sistemas astrofísicos. Aquellos producidos por colapso gravitacional de estrellas con $M \simeq 15M_{\odot}$ dan lugar a agujeros con masas alrededor de 8 masas solares (en las últimas etapas de su evolución las estrellas eyectan grandes partes de su envoltente al medio interestelar). Éstos son los llamados agujeros negros estelares. Una segunda clase consiste de agujeros negros supermasivos, que ocurren en los núcleos de galaxias, con $M \simeq (10^6 - 10^9)M_{\odot}$, y son producto de una larga historia de aglomeración de gas en las regiones centrales de las galaxias, y de fusión entre galaxias. Aquí consideraremos agujeros negros primordialmente de la primera categoría, aunque algunos resultados pueden ser relevantes para todos los casos.

El estudio de los objetos compactos en astrofísica se volvió importante con el desarrollo de la astronomía de rayos X, en los años 60, especialmente con el descubrimiento de los pulsares (mencionado arriba) y de las fuentes galácticas de rayos X, como Cygnus X-1. La evolución de sistemas binarios con objetos compactos es hoy una de las disciplinas de mayor interés en astrofísica, con relevancia para los estudios de evolución estelar, poblaciones estelares, y diagnósticos de generación de chorros colimados y posiblemente relatividad general (Postnov & Yungelson 2006). En cuanto a los agujeros negros supermasivos, nuestra propia galaxia contiene uno en su centro, Sgr A, con una masa estimada en 3.6 millones de masas solares (Ghez et al. 2008).

9.2. Los discos de acreción como un fenómeno astrofísico

Los objetos compactos (EB, EN y AN estelares) frecuentemente se encuentran en sistemas binarios, como la mayoría de las estrellas (Eggleton 2006). La interacción entre ellos y sus estrellas compañeras dá lugar a algunos de los fenómenos más interesantes en astrofísica. La transferencia

de masa se da principalmente a través de dos mecanismos. En el primero, la compañera puede producir un fuerte viento que expulsa gas de sus capas superiores al exterior. Parte del gas es capturado gravitacionalmente por el objeto compacto y puede acretar sobre él. En el segundo, la separación entre las estrellas es tan pequeña comparada con su radio que una de ellas arranca material a la otra, y se produce un chorro de material a través del punto interior de Lagrange en el potencial común efectivo, que cae sobre la estrella compacta. Dado que el momento angular específico de este gas es distinto de cero, no puede caer en forma radial, sino que es desviado y forma un disco al circularizar su órbita por efectos disipativos.

La acreción sobre objetos compactos fue considerada como una manera eficiente de transformar la energía gravitacional en radiación inicialmente por Salpeter (1964) y Zeldovich (1964) de manera independiente. En la mayoría de los casos se espera que el momento angular no sea completamente despreciable, así que en las regiones más cercanas al objeto central se formará un disco. Para que la acreción ocurra es entonces indispensable el transporte de momento angular de las partes internas hacia el exterior (Abramowicz et al. 2010), para que la masa pueda moverse a radios menores.

Hay varios parámetros que son fundamentales para determinar en que forma ocurre la acreción sobre un objeto compacto. En primer lugar el momento angular del gas en torno al objeto compacto determina la geometría de la acreción sobre éste. Si el momento angular es bajo, se tendrá acreción esférica (o casi). Este caso fue resuelto en el límite hidrodinámico no viscoso originalmente por Bondi en 1952, ignorando los efectos de los campos magnéticos y considerando un objeto en un medio inicialmente homogéneo, en reposo. El caso de un objeto en movimiento uniforme fue calculado por Bondi y Hoyle en 1944. Por el contrario, si el momento angular del gas es alto, se formará un disco de acreción en torno al objeto central, con una curva de rotación cercana a la de órbitas Keplerianas. Si el disco adicionalmente se enfría en forma eficiente será delgado (su altura $H \ll R$). El modelo estándar para este caso se debe a Shakura & Sunyaev (1973), que además propusieron en ese trabajo una fórmula para caracterizar los procesos de viscosidad en el disco, que se presumen responsables del transporte de momento angular. Sin especificar los detalles del mecanismo de transporte, la parametrización (llamada viscosidad α) de Shakura & Sunyaev permitió avanzar en el estudio de sistemas conteniendo discos, haciendo predicciones detalladas con respecto a la luminosidad y el espectro de radiación emergente del disco. Trabajos teóricos y numéricos más recientes indican que probablemente los campos magnéticos presentes en el gas puedan producir una viscosidad efectiva que lleve al transporte de momento angular (Balbus & Hawley 1991, Hawley & Balbus 1991, Hawley 2000, Stone & Pringle 2001), con valores de α equivalentes entre 0.01–0.1 (Balbus & Hawley 1998). Adicionalmente, ha quedado claro que en una variedad de sistemas, los procesos puramente hidrodinámicos pueden ser importantes en determinar la evolución del disco. Por ejemplo, en sistemas donde el enfriamiento es poco eficiente (los llamados ADAFs o Advection Dominated Accretion Flows, la acumulación de energía interna por disipación lleva inmediatamente a discos que no son delgados ($H \simeq R$) y donde por lo tanto pueden darse efectos como convección y circulaciones a grandes escalas. Entonces, es importante entender la hidrodinámica de fluidos en torno a objetos compactos.

En segundo lugar, la intensidad del campo magnético de la estrella central puede ser importante

para determinar la evolución del sistema. Para el caso de estrellas de neutrones con campos magnéticos fuertes ($B \simeq 10^{11} - 10^{12} \text{G}$), el campo se vuelve dominante y controla el flujo del gas a una distancia de varios cientos de radios estelares. El gas sigue las líneas de campo magnético y alcanza la superficie de la estrella únicamente cerca de los polos magnéticos, donde se produce la mayor parte de la emisión (Pringle & Rees 1972, Ghosh & Lamb 1978). Si el campo magnético es más débil ($B < 10^{10} \text{G}$), el disco puede extenderse hasta la superficie de la estrella, y la emisión proviene principalmente de las regiones internas del disco, y de la superficie de la estrella (éste es el caso considerado por Shakura & Sunyaev).

Evidentemente el estudio detallado de sistemas con las características descritas arriba requiere de la incorporación de la teoría de la relatividad general, procesos magnetohidrodinámicos, transporte de radiación, y una ecuación de estado detallada para el fluido, todo esto en tres dimensiones, ya que frecuentemente no hay simetrías en el sistema que permitan una simplificación inmediata en este aspecto. No es posible hoy en día realizar esto de forma simultánea, así que se hacen ciertas suposiciones dependiendo del problema que se quiera resolver. Detallaremos algunas de éstas para los casos particulares que se presentan más adelante.

A continuación damos estimaciones sencillas en cuanto a la luminosidad y regiones espectrales en las cuales se esperaría que se encontrara la emisión de sistemas con objetos compactos (Frank et al. 2002).

Para una estrella de masa M y radio R , se libera una energía $\Delta E = GMm/R$ cuando una masa m es acretada en su superficie, por la liberación de la energía potencial gravitacional. Para parámetros típicos de una estrella de neutrones, $M = 1M_{\odot}$, $R = 10 \text{ km}$ y entonces obtenemos del orden de 10^{20} erg por gramo de material, o 10% de su energía de reposo. Las reacciones nucleares que convierten al Hidrógeno en Helio liberan 0.7% de la energía de reposo, por lo que es evidente que la acreción representa una forma de extracción de energía importante. También es claro a partir de la ecuación utilizada arriba, que cuanto más compacto sea el objeto (M/R pequeño) más eficiente será la acreción. Para agujeros negros los números son en principio comparables a los de estrellas de neutrones, mientras que para enanas blancas, la combustión nuclear es más eficiente por un factor de 20 aproximadamente. De cualquier manera la acreción sobre enanas blancas puede ser importante, y de hecho domina la luminosidad cuando no se producen reacciones nucleares sobre su superficie.

La luminosidad está limitada por la presión de radiación que ejercen los fotones emitidos por el gas caliente cerca del objeto central, sobre el gas que intenta acretar. Para una opacidad proveniente de dispersión sobre electrones (Thomson), este límite es

$$\begin{aligned} L_{Edd} &= 4\pi GMm_p c / \sigma_T \\ &= 1.3 \times 10^{38} (M/M_{\odot}) \text{ erg s}^{-1} \end{aligned}$$

9.3. La acreción hipercrítica y los destellos de rayos gamma

donde σ_T es la sección de dispersión de Thomson (límite de Eddington). Ello implica que en un estado estacionario la tasa de acreción está limitada. Si toda la energía gravitacional del gas que es acretado es liberada en radiación, la luminosidad de acreción es

$$\begin{aligned} L_{acc} &= GM\dot{M}/R \\ &= 1,3 \times 10^{33} \dot{M}_{16} (M/M_{\odot}) (10^9 \text{ cm}/R) \text{ erg s}^{-1} \\ &= 1,3 \times 10^{36} \dot{M}_{16} (M/M_{\odot}) (10 \text{ km}/R) \text{ erg s}^{-1}. \end{aligned}$$

Las unidades representan valores típicos para enanas blancas y estrellas de neutrones, de manera que las tasas de acreción (en unidades de 10^{16} g s^{-1}) quedan limitadas a 10^5 y 10^2 respectivamente. Típicamente, en sistemas binarios, las tasas de transferencia de masa son justamente de $10^{-10} M_{\odot}$ por año, así que $\dot{M}_{16} = 1$ y se tienen luminosidades de 10^{33} y $10^{36} \text{ erg s}^{-1}$ respectivamente, bastante por debajo del límite de Eddington.

Veamos ahora en que región espectral es emitida la radiación. Para ello basta considerar una frecuencia típica ν y definir $T_{rad} = h\nu/k$. El valor exacto de T_{rad} estará entre aquel de cuerpo negro, $T_b = (L_{acc}/4\pi R^2\sigma)^{1/4}$ en el caso de que la fuente sea ópticamente gruesa y se logre el equilibrio térmico, y $T_{th} = GMm_p/3kR$, en el caso de que el gas sea ópticamente delgado y la energía potencial gravitacional se convierta directamente en radiación. Para los valores típicos de estrellas de neutrones, se obtiene $T_{th} \simeq 5 \times 10^{11} \text{ K}$ ($kT_{th} \simeq 50 \text{ MeV}$) y $T_b \simeq 10^7 \text{ K}$ ($kT_b \simeq 1 \text{ keV}$), suponiendo $L_{acc} \simeq L_{Edd}$. Estas temperaturas y energías corresponden a rayos X, hasta rayos gamma. Para enanas blancas se obtienen límites de 5 eV y 100 keV respectivamente, suponiendo $L_{acc} \simeq 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$, así que esto implica emisión en el óptico, ultravioleta y rayos X suaves.

9.3. La acreción hipercrítica y los destellos de rayos gamma

Los destellos de rayos gamma (GRBs, por sus siglas en inglés: Gamma Ray Bursts) probablemente se originan por acreción a tasas muy elevadas sobre agujero negro recién formados (Woosley & Bloom 2006, Nakar 2007, Lee & Ramirez-Ruiz 2007, Gehrels et al. 2009). Los hay de dos clases si uno considera su duración (Kouveliotou 1995): largos (más de dos segundos, típicamente 10 segundos) y cortos (menos de dos segundos, típicamente 0.2-0.4 segundos). Actualmente se tienen observaciones multifrecuencia (rayos X, óptico, radio) de estos objetos y sus remanentes (afterglows), pero sólo para los destellos largos (ver una revisión después de la revolución a final de los 90s en este sentido por van Paradijs et al. 2000). Ello ha establecido que se encuentran a distancias enormes (corrimientos al rojo z que van de algunas décimas hasta 8), y que por lo tanto liberan enormes cantidades de energía, típicamente $10^{49} - 10^{52} \text{ erg}$ si uno supone que la emisión es isotrópica. Adicionalmente, en varios casos se ha establecido de manera convincente una asociación GRB-supernova (Woosley & Bloom 2006). Ello apoya la idea, propuesta originalmente por Woosley (1993) de que los GRBs son de alguna manera una supernova “fallida”, que produce

mucho mayor emisión, más energética y por menor tiempo. La propuesta de Woosley involucraba una estrella masiva con rotación, de manera que después del colapso una gran cantidad de material formaba un disco de acreción en torno a un agujero negro recién formado por el colapso del núcleo estelar. En los últimos años este modelo ha recibido mucha atención, iniciando con el trabajo de MacFadyen & Woosley (1999), y se ha desarrollado de manera importante. Hoy en día se considera como una explicación bastante robusta para los destellos largos. Por otra parte, desde 2004 inició la operación del satélite SWIFT, diseñado en gran medida para resolver el caso de los destellos cortos. No ha decepcionado, encontrando contrapartes en rayos X y el visible para una muestra de estos eventos, demostrando que también son de origen cosmológico, aunque de poblaciones estelares distintas y más diversas que los de larga duración (Nakar 2007, Lee & Ramirez-Ruiz 2007, Gehrels et al. 2009). La discusión que sigue en cuanto a los procesos de acreción se centra a veces más en los progenitores de eventos cortos, aunque mucho de ello sigue siendo aplicable a eventos largos, simplemente porque el régimen hidrodinámico y termodinámico que resulta es bastante similar.

Es posible que los GRBs sean el producto de acreción violenta sobre agujeros negros recién formados para todos los casos. Este régimen suele denominarse como “acreción hipercrítica”, y será discutido más adelante. Los destellos largos podrían provenir del colapso de estrellas masivas con rotación (para obtener un disco de acreción) y los cortos de fusiones binarias de objetos compactos (Paczynski 1986, 1991, Eichler et al. 1989). Éstos son sistemas formados por dos estrellas de neutrones (como el pulsar de Hulse Taylor (1975), PSR1913+16 o el descubierto en 2003, PSR0937, Burgay et al (2003)), o una estrella de neutrones y un agujero negro. Dados los periodos orbitales observados en estos sistemas (8 y 2.5 horas respectivamente), así como resultados de cálculos de síntesis de poblaciones estelares, se espera que una fracción importante de estos sistemas fusionen debido a la pérdida de energía a ondas gravitacionales. Las tasas de formación esperadas coinciden relativamente bien con el ritmo al que se observan los GRBs, de manera que esto parece factible (Kalogera et al. 2004). Al hacerlo emitirán un potente destello de energía gravitacional y electromagnética. La interacción hidrodinámica en un caso así es complicada, y su investigación requiere de estudios numéricos tridimensionales de alta resolución, y el mayor detalle físico posible (relatividad general, magnetohidrodinámica, microfísica detallada, entre otros).

Varios grupos han investigado en detalle el producto de las fusiones binarias formadas por agujeros negros y estrellas de neutrones, con varias simplificaciones, y complicaciones, que han permitido realizar avances significativos (ver Shibata & Taniguchi 2011 y Faber & Rasio 2012 para una revisión reciente de estos temas). Típicamente los resultados de las simulaciones tridimensionales muestran que la estrella de neutrones es rápidamente destruida por fuerzas de marea cuando la separación orbital es de unos cuantos radios estelares, y se forma un disco de acreción grueso y caliente en torno al agujero negro. El primero contiene unas cuantas centésimas a décimas de masa solar y el segundo aproximadamente 4-6 masas solares, y los resultados dependen del tipo de objeto, el cociente de masas, el momento angular (spin) de los mismos y la ecuación de estado que se utiliza para modelar a las estrellas de neutrones.

Con ello se tiene entonces un conjunto de condiciones iniciales que pueden ser utilizadas para investigar la evolución del disco a largo plazo (las simulaciones en 3D duran solamente unos 10–20 tiempos dinámicos, equivalentes a 20-40 ms por restricciones computacionales), es decir, al menos

un segundo (comparable con la duración de un destello corto). La estructura estacionaria de estos discos fue inicialmente estudiada en forma analítica por varios autores (Popham et al. 1999, Narayan et al. 1991, Kohri & Mineshige 2002), no siempre en forma completamente autoconsistente, pero resultaba necesario llevar a cabo un estudio numérico detallado de la dinámica de los mismos sin las simplificaciones intrínsecas a los primeros.

La producción del destello en sí requiere que la energía de la acreción sea transformada de alguna manera en un flujo relativista con factores de Lorentz $\Gamma \simeq 300$, para explicar las observaciones (Mészáros & Rees, 1992, 1993). El argumento es que la variabilidad temporal en la fuente produce un flujo relativista variable, donde capas con distintos factores de Lorentz interactúan entre sí a grandes distancias de la fuente. Los choques producidos en estas interacciones generarían los rayos gamma. Los mecanismos correspondiente pueden explicar muchos detalles de las observaciones, pero hay incógnitas aún sin resolver (por ejemplo como se da la generación de rayos gamma de muy alta energía observados en varios destellos, González et al. 2003, Fraija et al. 2012, Sacahui et al. 2012). Esto probablemente se logra mediante la producción de chorros colimados a lo largo del eje de rotación, que extraen la energía del disco de acreción, ya sea por procesos hidrodinámicos (vientos producidos por radiación y/o neutrinos) o magnetohidrodinámicos (del mismo campo del disco o extrayendo la energía de rotación del agujero negro mediante el proceso de Blandford & Znajek (1997)). Hoy en día los grupos que investigan estos mecanismos suelen considerar que algún mecanismo no especificado deposita una cierta energía a un ritmo dado en las regiones polares, y a partir de esto se calcula la evolución subsecuente de los chorros generados. De manera que no se tiene aún una solución completamente autoconsistente de la generación y propagación de los chorros que producen el destello en sí. Un primer paso es obtener de manera consistente la energía liberada por el proceso de acreción mientras el disco en sí está evolucionando. Esto permitirá hacer cálculos más realistas de la producción de los chorros generados. La retroalimentación de éste con el disco presenta un problema de un orden más complicado.

9.4. Escalas típicas y ecuación de estado en el régimen hipercrítico

Para la duración típica de un destello corto (unos cuantos segundos a lo más), la luminosidad en fotones es miles de veces la de un núcleo activo de galaxias, donde se supone opera un agujero negro supermasivo, y supera el límite de Eddington para fotones en más de 10 órdenes de magnitud. Pero estudiando el argumento dado arriba para este límite, es claro que si la partícula responsable de la interacción tiene una sección eficaz mucho menor, el límite puede cambiar sustancialmente. En el límite hipercrítico, esta partícula es el neutrino, y no el fotón, modificando así la restricción y permitiendo flujos de energía hasta 16 órdenes de magnitud más grandes. Así, el límite considerando la sección de interacción para producción de pares por neutrinos es

$$L_{\text{Edd},\nu} = 8 \times 10^{53} \left(\frac{E_\nu}{50\text{MeV}} \right)^{-2} (M/M_\odot) \text{ erg s}^{-1}, \quad (9.1)$$

donde E_ν es la energía de los neutrinos, y la tasa de acreción asociada suponiendo una eficiencia de 100 % para la conversión de masa a energía en neutrinos es,

$$\dot{M}_{\text{Edd},\nu} = 0,4(M/M_\odot) \left(\frac{E_\nu}{50\text{MeV}} \right)^{-2} M_\odot \text{ s}^{-1}. \quad (9.2)$$

Para que el objeto en cuestión logre deshacerse de esta energía hace falta que transcurra un tiempo dado por:

$$t_{\text{Edd},\nu} = \frac{M}{\dot{M}_{\text{Edd},\nu}} \sim 2,5 \left(\frac{E_\nu}{50\text{MeV}} \right)^2 \text{ s}. \quad (9.3)$$

Por otro lado, el tiempo requerido para que la masa cambie sustancialmente por acreción en este régimen es $\sim (L/L_{\text{Edd},\nu})^{-1} \times (\text{eficiencia})^{-1} \times t_{\text{Edd},\nu}$. El tiempo dinámico cerca del horizonte de eventos para un agujero negro es un múltiplo de R_g/c , donde R_g es el radio característico del objeto central, dado por

$$R_g = GM/c^2 \sim 1,5 \times 10^5 (M/M_\odot) \text{ cm}, \quad (9.4)$$

(el radio clásico de Schwarzschild) y es entonces mucho menor que $t_{\text{Edd},\nu}$.

Para escalar la densidad en la vecindad de un agujero negro acretando a este ritmo, consideramos

$$\rho_{\text{Edd},\nu} = \frac{\dot{M}_{\text{Edd},\nu}}{4\pi R_g^2 c} \sim 10^{11} (M/M_\odot)^{-1} \left(\frac{E_\nu}{50\text{MeV}} \right)^{-2} \text{ g cm}^{-3}. \quad (9.5)$$

Bajo estas condiciones, la profundidad óptica de Thomson (dispersión por electrones libres) es

$$\tau_T \sim n_{\text{Edd},\nu}^{1/3} R_g \sim 10^{16} \quad (9.6)$$

y entonces los fotones son completamente incapaces de salir y enfriar el fluido. Finalmente, se puede definir una temperatura de Eddington como aquella de un cuerpo negro con luminosidad $L_{\text{Edd},\nu}$ de una esfera de radio R_g ,

$$T_{\text{Edd},\nu} = \left(\frac{L_{\text{Edd},\nu}}{4\pi R_g^2 \sigma_{\text{SB}}} \right)^{1/4} \sim 5 \times 10^{11} (M/M_\odot)^{-1/4} \left(\frac{E_\nu}{50\text{MeV}} \right)^{-1/2} \text{ K}, \quad (9.7)$$

o

$$kT_{\text{Edd},\nu} \sim 45 (M/M_\odot)^{-1/4} \left(\frac{E_\nu}{50\text{MeV}} \right)^{-1/2} \text{ MeV}, \quad (9.8)$$

y una intensidad de Eddington para el campo magnético

$$B_{\text{Edd},\nu} = \left(\frac{L_{\text{Edd},\nu}}{R_g^2 c} \right)^{1/2} \sim 3 \times 10^{16} (M/M_\odot)^{11/2} \left(\frac{E_\nu}{50\text{MeV}} \right)^{-1} \text{ G}. \quad (9.9)$$

Por último y a modo de comparación como lo hicimos anteriormente, la temperatura térmica que tendría el material que acreta si su energía potencial gravitacional fuera convertida a energía interna es

$$T_{\text{th}} = \frac{GMm_p}{3kR_g} \sim 3 \times 10^{12} \text{ K}. \quad (9.10)$$

Aunque aquí hemos considerado el caso particular de creación de pares para la opacidad, los números no cambian mucho si se toma en cuenta por ejemplo dispersión coherente de neutrinos sobre nucleones libres para el régimen dado.

Queda claro entonces que para acreción sobre un agujero negro estelar de unas cuantas masas solares, o una estrella de neutrones se tienen densidades y temperaturas tan grandes ($\rho \simeq 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$, $T \simeq 10^{11} \text{ K}$) que: (i) los fotones están completamente atrapados; (ii) los neutrinos son la principal fuente de enfriamiento del gas. Este último punto es importante: aún cuando los neutrinos no sean capaces de proporcionar la energía suficiente para producir un destello de rayos gamma, como ha sido considerado por varios estudios, el hecho de que sean el mecanismo que permite el enfriamiento del gas los convierte en un ingrediente fundamental para entender el comportamiento del fluido.

Este régimen es el denominado “hipercrítico” requiere tasas del orden de las dadas arriba. En primera instancia se considero para el caso de la explosión de supernova de 1987, SN1987A por Chevalier (1989) y Houck & Chevalier (1991). Para el caso de binarias de rayos X o núcleos activos de galaxias, las tasas de acreción nunca llegan a estos valores y se mantienen por debajo del límite de Eddington para fotones. Pero durante la formación de estrellas de neutrones y agujeros negros estelares, en el colapso de núcleos masivos al término de la evolución estelar sí es posible lograrlos. De hecho, cuando la densidad alcanza $\rho \simeq 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$ incluso se vuelve necesario considerar efectos de opacidad a neutrinos, ya que no les es posible escapar libremente (la profundidad óptica correspondiente alcanza $\tau_\nu \simeq 1$).

9.5. Régimen termodinámico y ecuación de estado

Típicamente la mayor parte de la masa en estos discos está en las regiones más internas, a distancias menores a $4 \times 10^7 \text{ cm}$ del agujero negro, que cuenta con unas 3-5 masas solares. Son densos y calientes, y la temperatura es tan alta que los nú están fotodesintegrados ($10^9 \text{ g cm}^{-3} \leq \rho \leq 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$; $10^9 \text{ K} \leq T \leq 10^{11} \text{ K}$). Incluso debido al bloqueo de reacciones β inversas puede haber una neutrinización sustancial, y el número de electrones por barión, o fracción de electrones, Y_e , puede ser bastante menor a $Y_e = 1/2$. En términos del enfriamiento, las capturas de pares e^\pm sobre neutrones y protones libres dominan para densidades mayores a $10^{10} \text{ g cm}^{-3}$. De manera que el gas está formado básicamente por una mezcla en equilibrio estadístico nuclear (EEN) de partículas α , neutrones, protones, pares e^\pm , fotones (atrapados), y neutrinos. La abundancia de pares depende del grado de degeneración, que se puede medir a través del potencial químico de los pares e^\pm , η_e , comparado con la temperatura, kT . Las capturas de pares y la aniquilación de los mismos siempre produce (anti-)neutrinos del electrón, $(\bar{\nu}_e)\nu_e$, pero otros procesos, en particular la interacción libre-libre de nucleones, y el decaimiento de plasmones, producen neutrinos del μ y τ , ν_μ y ν_τ .

Queda claro de lo anterior que dar seguimiento adecuado a la evolución del disco requiere de una ecuación de estado que tome en cuenta todos estos aspectos, al menos en forma aproximada. Además, el campo gravitacional puede ser intenso, y se vuelve relevante considerar los efectos de la relatividad general. Por último, el sistema está sujeto a variaciones y posibles inestabilidades di-

námicas, algunas de ellas provenientes directamente del colapso del núcleo de la estrella o de la fusión de objetos compactos, de manera que un análisis que supone estado estacionario necesariamente se quedará corto en algunos aspectos que pudieran tener consecuencias observables.

En los estudios que hemos llevado a cabo, consideramos una ecuación de estado donde la presión está dada por

$$P = P_{\text{rad}} + P_{\text{gas}} + P_e + P_\nu, \quad (9.11)$$

donde P_ν es la presión asociada a los neutrinos, $P_{\text{rad}} = aT^4/3$, $P_{\text{gas}} = (1 + 3X_{\text{nuc}})\rho kT/(4m_p)$ y X_{nuc} es la fracción por masa de núcleos fotodesintegrados e ideales. Una solución aproximada al EEN entre nucleones libres y partículas α es

$$X_{\text{nuc}} = 22,4 \left(\frac{T}{10^{10} \text{ K}} \right)^{9/8} \left(\frac{\rho}{10^{10} \text{ gcm}^{-3}} \right)^{-3/4} \exp \left(-8,2 \frac{10^{10} \text{ K}}{T} \right), \quad (9.12)$$

donde no hemos considerado la presencia de núcleos más pesados, como el Fe. El parámetro de degeneración de los Fermiones puede variar considerablemente, así que utilizamos una expresión cerrada muy conveniente (de Blinnikov et al. 1996) que es válida para degeneración arbitraria (pero que requiere considerar Fermiones relativistas, así que supone $\rho \geq 10^6 \text{ g cm}^{-3}$),

$$P_e = \frac{1}{12\pi(\hbar c)^3} \left[\eta_e^4 + 2\pi^2 \eta_e^2 (kT)^2 + \frac{7}{15} \pi^4 (kT)^4 \right], \quad (9.13)$$

y calculamos la fracción de electrones $Y_e = n_p/(n_p + n_n)$ mediante

$$\frac{\rho Y_e}{m_p} = n_- - n_+ = \frac{1}{3\pi^2(\hbar c)^3} [\eta_e^3 + \eta_e \pi^2 (kT)^2]. \quad (9.14)$$

Estas fórmulas se reducen a los límites bien conocidos cuando la temperatura es baja ($kT \ll \eta_e$, que da $P \propto \rho^{4/3}$ para un gas de Fermi frío) y cuando es alta ($kT \gg \eta_e$, que da $P \propto T^4$ para pares e^\pm relativistas). Automáticamente queda incluida la posibilidad de pares en el límite relativista, y no es necesario modificar el factor 1/3 que lleva el término que corresponde a los fotones.

Los cambios en profundidad óptica a neutrinos también afectan la composición a través de la fracción de electrones Y_e . Consideramos la aproximación que hizo Beloborodov (2003), y calculamos Y_e con

$$Y_e = \frac{1}{2} + 0,487 \left(\frac{Q/2 - \eta_e}{kT} \right) \quad (9.15)$$

en el límite ópticamente delgado para degeneración moderada (aquí $Q = [m_n - m_p]c^2$), y

$$\frac{1 - Y_e}{Y_e} = \exp \left(\frac{\eta_e - Q}{kT} \right) \quad (9.16)$$

para el caso ópticamente grueso. La última expresión se sigue de hacer el potencial químico de los neutrinos igual a cero en la reacción $e + p \leftrightarrow n + \nu_e$ y aplicar estadística de Maxwell–Boltzmann para los núcleos, que no son degenerados, mientras que la primera es consecuencia de pedir equilibrio en la tasa de reacciones de capturas de pares e^\pm sobre los neutrones y protones. Para interpolar

suavemente entre ambas, usamos un factor de atenuación exponencial de la misma profundidad óptica, $\exp(-\tau_\nu)$ (Lee et al. 2005). Así, numéricamente resolvemos la ecuación de energía para la energía interna por unidad de masa, dada por

$$u = 3 \frac{P_e + P_{\text{rad}} + P_\nu}{\rho} + \frac{1 + 3X_{\text{nuc}}}{4} \frac{3kT}{2m_u}, \quad (9.17)$$

y el equilibrio β , que se reduce a

$$Y_e = \frac{1 - X_{\text{nuc}}}{2} + X_{\text{nuc}}[Af(\tau_\nu) + Bg(\tau_\nu)], \quad (9.18)$$

donde

$$A = \frac{1}{2} + 0,487 \left(\frac{Q/2 - \eta_e}{kT} \right), \quad (9.19)$$

$$B = 1 + \exp \left(\frac{\eta_e - Q}{kT} \right) \quad (9.20)$$

y $f(\tau_\nu) = \exp(-\tau_\nu)$; $g(\tau_\nu) = (1 - \exp(-\tau_\nu))$.

Para cerrar el sistema, utilizamos la conservación de carga, dada por la ecuación 9.14.

Utilizamos las tablas de Langanke & Martínez-Pinedo (2001) para capturas, y ajustes analíticos para aniquilación de pares (Itoh 1996) para calcular las emisividades de neutrinos.

El último ingrediente necesario es la determinación de la profundidad óptica a neutrinos, τ_ν . Para ello consideramos únicamente y como guía la dispersión coherente de neutrinos sobre protones y neutrones libres, y partículas α . Las secciones de interacción son

$$\sigma_N = \frac{1}{4} \sigma_0 \left(\frac{E_\nu}{m_e c^2} \right)^2, \quad (9.21)$$

y

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \left(\frac{E_\nu}{m_e c^2} \right)^2 [4 \sin^2 \theta_W]^2, \quad (9.22)$$

donde $\sigma_0 = 1,76 \times 10^{-44} \text{ cm}^2$, θ_W es el ángulo de Weinberg y E_ν es la energía de los neutrinos, que es aproximadamente igual a la energía de Fermi E_F de los electrones ligeramente degenerados. La profundidad óptica se estima entonces como $\tau_\nu = H/l_\nu$, donde H es la escala local de altura en el disco y l_ν es el camino libre medio de los neutrinos. En las regiones internas de discos masivos, se puede llegar incluso a tener $\tau_\nu \sim 10^2$, lo cual muestra que dichos efectos pueden ser importantes.

El enfriamiento efectivo es entonces la emisividad local, modulada por un factor $\exp(-\tau_\nu)$ para tomar en cuenta la difusión. La luminosidad total en neutrinos es entonces

$$L_\nu = \int \rho^{-1} (\dot{q}_{\text{ff}} + \dot{q}_{\text{plasmon}} + \dot{q}_{\text{pair}} + \dot{q}_{\text{cap}}) \exp(-\tau_\nu) dm. \quad (9.23)$$

La transición de transparente a opaco ocurre en $\tau_\nu \approx 1$, que corresponde a $\rho \approx 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$. La fotodesintegración enfría el gas a una tasa $\dot{q}_{\text{phot}} = 6,8 \times 10^{18} (dX_{\text{nuc}}/dt) \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-3}$, que se incluye

en la ecuación de energía. Por último, el momento angular se transporta a través de la prescripción α de Shakura & Sunyaev (1973), incluyendo todos los términos del tensor de esfuerzos en simetría azimutal (Lee & Ramirez-Ruiz 2002).

Desde un punto de vista numérico, hemos estudiado la evolución de esta clase de discos en simetría azimutal (r, z) , cuando después de una fusión binaria, un disco de masa $M_d \simeq (10^{-3} - 10^{-1})M_\odot$ se forma alrededor de un agujero negro de masa $M_{AN} \simeq (5 - 10)M_\odot$ y en su interior opera una viscosidad $\alpha \simeq (10^{-3} - 10^{-1})$ que transporta momento angular. Las ecuaciones de Navier-Stokes son discretizadas con el método Monte Carlo conocido como “Smooth Particle Hydrodynamics”, o SPH (ver Monaghan 1992, y Rosswog 2009 para artículos de revisión del método). Es un formalismo Lagrangiano que permite seguir con buen detalle la evolución de esta clase de sistema de manera adaptativa en tiempo y espacio (para mayores detalles de nuestra versión particular, ver Lee & Ramirez-Ruiz 2002). En términos generales, lo que las simulaciones muestran es que: (i) la energética global de los discos permite una liberación de energía capaz de explicar un destello de rayos gamma; (ii) la duración del evento, medida a través del intervalo durante el cual la luminosidad de acreción es comparable con la observada en un GRB, se ajusta a la observada para eventos cortos; (iii) la duración del evento está claramente relacionada con el tiempo de Kelvin–Helmholtz de enfriamiento del gas (el disco nace dinámicamente caliente en virtud del sistema que lo produjo), y con la escala de tiempo asociada al transporte de momento angular; (iv) el comportamiento termodinámico del disco, y en particular la nucleosíntesis, y la eyección de masa a través de vientos, puede tener consecuencias observables (que detallamos más adelante, Roberts et al. 2011); (v) la formación de colas de marea durante la interacción binaria que produjo el disco en primera instancia, puede dar lugar en principio a episodios secundarios de acreción (Lee et al. 2009), que produzcan ráfagas a menor energía observadas en GRBs (ver Gehrels et al. 2009).

Tal vez parecería que la descripción dada arriba es bastante completa, pero es claro que hay aún asuntos pendientes que son relevantes para lograr un entendimiento más detallado de los procesos en estos discos. En primer lugar, hemos supuesto que las reacciones consideradas alcanzan todas el equilibrio. Esto es razonable para la fotodesintegración, pero no necesariamente para las reacciones débiles, particularmente en las regiones de menor densidad y/o para discos poco masivos (con masa menor a $\simeq 10^{-3} M_\odot$). Segundo, el tratamiento de los neutrinos dista mucho de constituir un estudio completo de transporte de Boltzmann, como se ha hecho en algunos casos en el contexto de explosiones de supernova en una dimensión, pero al menos en lo cualitativo toma en cuenta la transición opaco/transparente que sucede en el disco si la densidad es lo suficientemente alta. Lo más relevante que no está incluido podría ser la retroalimentación de los neutrinos en no sólo enfriar el gas, sino en transportar energía y depositarla en una región distinta a través de interacciones como dispersión no-coherente. Este punto puede resultar muy importante para entender la generación de flujos relativistas que a fin de cuentas producen la emisión observada en el destello de rayos gamma. Esperamos tratar algunos de estos problemas a futuro.

9.6. Consecuencias observables y conclusiones

En los últimos 15 años ha quedado claro que para entender los eventos que producen los destellos de rayos gamma a mayor detalle, es necesario un estudio cuidadoso de los procesos microfísicos y termodinámicos que ocurren en el interior de los objetos que los producen. La mejor manera que conocemos de liberar grandes cantidades de energía en un plazo corto es la acreción sobre objetos compactos, y todos, o casi todos, los modelos viables hoy involucran ya sea un agujero negro, o una estrella de neutrones con un intenso campo magnético, o ambos. Se ha dado una revolución en su entendimiento sobre todo a partir de la observación de la transformación de la emisión pronta, en rayos gamma, al “Afterglow.”^a menor energía, y de modelos que buscan entender a mayor detalle la emisión secundaria que se produce, y puede dar indicios más claros del evento mismo. Un ejemplo importante en este sentido tiene que ver con la formación de las colas de marea referidas en la sección anterior. En el sistema binario, por ejemplo de un agujero negro y una estrella de neutrones, que después forma el disco, en el momento que la estrella es destruida por las fuerzas de marea se forma una larga cola de material a grandes distancias. Una parte de ella sigue ligada gravitacionalmente al objeto central, pero otra, que puede llegar a contener $10^{-2}M_{\odot}$ alcanza la velocidad de escape y es eyectada al medio interestelar (Lee & Ramirez-Ruiz 2007). El material en esta cola es rico en neutrones, y en él se produce nucleosíntesis, en particular a través del proceso-r de captura de neutrones, formando elementos pesados (por ej., Roberts et al. 2011). Dado que el sitio astrofísico donde se da el proceso-r, y que explicaría las abundancias cósmicas observadas no se ha identificado aún por completo, este mecanismo es una opción interesante que vale la pena explorar. Además de la contribución nucleosintética, el proceso mismo y los decaimientos radioactivos que se dan en los días que siguen a la eyección producirían una señal parecida a la de una supernova, pero a menor energía. Estos eventos se conocen como “kilonovasz” podrían marcar el sitio de los GRBs unos 3-5 días después del evento principal. Su caracterización y búsqueda apenas inicia.

Al mismo tiempo, la relación entre el evento en sí, y la galaxia que lo alberga y su población estelar es de gran importancia, ya que es necesario que los modelos de los progenitores sean viables desde el punto de vista de su demografía. En ese sentido los destellos largos probablemente vienen de una población fundamentalmente distinta a los cortos: los primeros ocurren en galaxias con mucha formación estelar, y están asociados al colapso de estrellas masivas (Fruchter 2006, Woosley & Bloom 2006); los segundos tienen un origen más diverso, y parecen estar en general asociados a galaxias con muy poca formación estelar, indicando una población más vieja (Berger 2011). La diversidad es buena y mala, porque da lugar a muchas posibilidades, con lo cual es difícil identificar certeramente un caso particular de progenitor que pueda funcionar.

Hoy en día, los primeros observatorios de ondas gravitacionales, LIGO y VIRGO están empezando a funcionar (Abadie et al. 2012) y se espera que en los próximos 5-10 años tengamos las primeras detecciones directas de ondas gravitacionales. En virtud de las fuentes probables, ya sea por colapso de núcleos estelares masivos, o por fusiones de binarias con objetos compactos, la observación en un nuevo espectro seguramente daría confirmación directa de los modelos propuestos, o llevaría a alguna opción aún más interesante. El círculo que abarcaría aspectos de relatividad de lo más pequeño a lo más grande, y de lo especial a lo general, cerraría uno de los capítulos más interesantes

de la astrofísica contemporánea.

Agradecimientos

Es un placer agradecer a W Kluźniak, E Ramirez Ruiz, D Page, J Bloom, J X Prochaska, D López-Cámara y A Carballido, por su colaboración y sugerencias en estos trabajos, y a los editores del presente volumen por la amable invitación a participar en esta compilación. La investigación presentada aquí ha sido apoyado por los proyectos CONACyT 36632, 45845, 83254 y 101958, por los proyectos PAPIIT 119998, 110600, 113810 y 110212, y por UCMEXUS.

Bibliografía

- [1] Abadie, J. et al., 2012, *Phys Rev D*, 85, 122007
- [2] Abramowicz, M.A., Björnsson, G., Pringle, J.E. 2010, *Theory of Black Hole Accretion Discs* (Cambridge Contemporary Astrophysics)
- [3] Balbus, S. A., Hawley, J. F. 1991, *ApJ*, 376, 214
- [4] Beloborodov, A.M., 2003, *ApJ*, 588, 931
- [5] Berger, E. 2011, *New Ast Rev*, 55, 1
- [6] Blandford, R. D., Znajek, R. L. 1977, *MNRAS*, 179, 433
- [7] Blinnikov, S. I., Dunina–Barkovskaya, N. V. & Nadyozhin, D. K. 1996, *ApJS*, 106, 171
- [8] Bondi, H. 1952, *MNRAS*, 112 195
- [9] Bondi, H., Hoyle, F., 1944, *MNRAS*, 104, 273
- [10] Burgay, M. et al 2003, *Nature*, 426, 531
- [11] Chandrasekhar, S., 1931, 91, 456
- [12] Chevalier, R. A. 1989, *ApJ*, 346, 847
- [13] Eggleton, P., *Evolutionary Processes in Binary and Multiple Stars* (Cambridge Astrophysics), 2006
- [14] Eichler, D., Livio, M., Piran, T., Schramm D. N. 1989, *Nat.*, 340, 126
- [15] Faber, J.A., Rasio, F.A., *Living Rev. Relativity* 15, 2012, 8, <http://www.livingreviews.org/lrr-2012-8>

- [16] Frank, J., King, A. Raine, D., 1995, *Accretion Power in Astrophysics*, Cambridge University Press
- [17] Fruchter, A.S. et al. 2006, *Nature*, 441, 463
- [18] Gehrels, N., Ramirez-Ruiz, E. & Fox, D.B. 2009, *ARA&A*, 47, 567
- [19] Ghez, A.M., et al. 2008, *ApJ*, 689, 1044
- [20] Ghosh, P., Lamb, F.K., 1978, *ApJ*, 223, 83
- [21] Hawley, J.F. 2000, *ApJ*, 528, 462
- [22] Hawley, J.F., Gammie, C.F., Balbus, S.A., 1995, *ApJ*, 440, 742
- [23] Houck, J. C. & Chevalier, R. A. 1991 *ApJ*, 376, 234
- [24] Hulse, R. A., Taylor, J. H. 1975, *ApJ*, 195, L51
- [25] Itoh, N., et al. 1996, *ApJS*, 102, 411
- [26] Kalogera, V. et al., 2004, *ApJ*, 601, L179
- [27] Kippenhahn, R. Weigert, A., *Stellar Structure and Evolution*, A&A Library, 1994, Springer
- [28] Kohri, K., Mineshige, S. 2002, *ApJ*, 577, 311
- [29] Kouveliotou, C., Koshut, T., Briggs, M. S., Pendleton, G. N., Meegan, C. A., Fishman, G. J., Lestrade, J. P. 1995, in Kouveliotou C., Briggs, M. F., Fishman, G. J., eds., *AIP Proc. 384, Gamma Ray Bursts*, AIP, New York, p. 42
- [30] Langanke, J. & Martínez–Pinedo G 2001, *At. Data Nucl. Data. Tables*, 79, 1
- [31] Lattimer, J.M., Prakash, M. 2007, *Phys Rep*, 442, 109
- [32] Lattimer, J.M., Prakash, M. 2010, *G Brown Fest*, World Scientific, Ed Sabine Lee
- [33] Lee, W.H., Ramírez–Ruiz, E., 2002, *ApJ*, 577, 893
- [34] Lee, W.H., Ramirez-Ruiz, E. 2007, *New J. Phys.*, 9, 17
- [35] Lee, W. H., Ramirez-Ruiz, & E., Page, D. 2005, *ApJ*, 632, 421
- [36] Lee, W.H., Ramirez-Ruiz, E., López-Cámara, D. 2009, *ApJ*, 699, L93
- [37] Lorimer, D.R., *Living Rev. Relativity* 11, 2008, 8, <http://www.livingreviews.org/lrr-2008-8>
- [38] MacFadyen, A. I., & Woosley, S. E. 1999, *ApJ*, 524, 262

- [39] Mezzacappa, A., Fuller, G.M., 2006, Open Issues in Supernova Theory, Proc. from the Institute for Nuclear Theory
- [40] Monaghan, J.J. 1992, ARA&A, 30, 543
- [41] Nakar, E., 2007, Physics Reports, Volume 442, Issue 1-6, p. 166-236
- [42] Narayan, R., Piran, T., & Kumar, P. 2001, ApJ, 557, 949
- [43] Oppenheimer, J.R., Snyder, H. 1939, Phys. Rev. 56, 455
- [44] Paczyński, B. 1986, ApJ, 308, L43
- [45] Paczyński, B. 1991, Acta Astron., 41, 257
- [46] Paczyński, B., & Wiita, P. J. 1980, A&A, 88, 23
- [47] Popham, R., Woosley, S. E., & Fryer, C. 1999, ApJ, 518, 356
- [48] Postnov, K.A. and Yungelson, L.R., 2006, Living Rev. Relativity 9, 2006, 6, <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-6>
- [49] Pringle, J., Rees, M.J., 1972, A&A, 21, 1
- [50] Roberts, L.F., Kasen, D., Lee, W.H., Ramirez-Ruiz, E. 2011, ApJ, 736, L21
- [51] Rosswog, S. 2009, New Ast Rev., 53, 78
- [52] Salpeter, E.E. 1964, ApJ, 140, 796
- [53] Shakura, N. I., & Sunyaev, R. A. 1973, A&A, 24, 337
- [54] Shibata, M. and Taniguchi, K., Living Rev. Relativity 14, 2011, 6 <http://www.livingreviews.org/lrr-2011-6>
- [55] Stone, J.M., Pringle, J.E. 2001, MNRAS, 322, 461
- [56] Woosley, S.E., 1993, ApJ, 405, 273
- [57] Woosley, S.E., Bloom, J.S. 2006, ARA&A, 44, 507
- [Zeldovich(1964)] Zeldovich, Ya. B. 1964, Soviet Phys., Dokl., 9, 195

Rapidez del sonido en un condensado de Bose–Einstein y la ecuación de Zaremba–Nikuni–Griffin

Abel Camacho

Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Apartado Postal 55-534, C.P. 09340, México D.F., México.

camacho@xanum.uam.mx

Resumen

La descripción del comportamiento de la velocidad del sonido en un condensado es un aspecto de la teoría de gases ultrafríos que ofrece la posibilidad de investigar propiedades físicas relevantes en este tipo de sistemas. Es por ello que la obtención de un modelo que permita hacer compatibles los resultados experimentales con los cálculos teóricos es de primordial importancia en este ámbito. Actualmente el método más socorrido para calcular la rapidez del sonido en un condensado está fundamentado en la teoría de campo medio. Este modelo requiere de varias suposiciones, entre ellas el asumir que el gas es suficientemente diluido. Sin embargo, los resultados experimentales no coinciden con los cálculos en aquella región en donde la coincidencia debería ser mejor. En el presente trabajo se muestra la posibilidad de emplear la llamada ecuación de Zaremba–Nikuni–Griffin para hacer compatible teoría con experimento. Se deducirá la rapidez del sonido para un condensado y se aplicará para el caso de un sistema conformado por átomos de Sodio y, adicionalmente, se mostrará que permite resolver la discrepancia antes señalada. Ello nos permitirá concluir que la ecuación de Gross–Pitaevskii si bien permite deducir de manera correcta el orden de magnitud de dicho parámetro no es capaz de ir más lejos en este aspecto.

10.1. Introducción

La idea acerca de la condensación de Bose–Einstein tiene ya una larga historia [1], sin embargo fue hasta el año de 1995 que su confirmación experimental tuvo lugar [2, 3]. Este lapso entre formulación teórica y detección experimental tiene su razón de ser en las dificultades experimentales que debieron vencerse para poder constatar la existencia de los condensados de Bose–Einstein. La posibilidad de producir estos sistemas en el laboratorio abre nueva ventana de oportunidades en la física, la cual nos permite explorar fenómenos cuánticos a nivel macroscópicos. Las propiedades de estos sistemas son muy diferentes a la de los gases ordinarios, líquidos, o sólidos, es por ello que su estudio es relevante. Por ejemplo, en un condensado los átomos ocupan el mismo estado cuántico y ello implica que el sistema se puede describir mediante, por ejemplo, una teoría tipo Hartree–Fock, esto como un caso de la, así llamada, teoría de campo medio. En este aspecto, aun cuando los gases son diluidos, las interacciones juegan un papel primordial y, en consecuencia, una comprensión más profunda de las interacciones interatómicas podría lograrse a través del análisis de la dinámica de los condensados de Bose–Einstein. Este caso recién mencionado nos muestra las opciones que los sistemas en cuestión nos ofrecen.

En el ámbito de gases cuánticos un tópico fundamental es el asociado con el estudio y análisis de las excitaciones colectivas o de bulto. Para el caso de fluidos cuánticos es factible dividir los modos colectivos en dos diferentes categorías, a saber, modos hidrodinámicos y aquellos modos carentes de colisiones. El primer caso se encuentra relacionado con la descripción de la dinámica, dentro de lo conocido como campos medios auto-consistentes. La última posibilidad aparece como una consecuencia de la presencia de interacciones entre las partículas que constituyen el condensado [4]. Un minucioso estudio de estas excitaciones colectivas permite atisbar en algunas de las características físicas de dichos sistemas. Por ejemplo, en el caso de alguno átomos alcalinos, como son el ^{87}Rb o ^{23}Na , el tamaño del condensado depende, críticamente, de la existencia de fuerzas de dos cuerpos de tipo repulsivo. Si bien las interacciones en un condensado son un evento poco frecuente su papel en la definición de las propiedades dinámicas no debe ser minimizado. La relevancia de las interacciones en este aspecto puede entenderse recordando que en un condensado se tiene un campo medio coherente muy grande [5]. Como otra situación interesante mencionemos que la densidad central de un condensado con interacciones es mucho mayor que aquella asociada a un sistema en el cual las interacciones están ausentes [6].

En el presente trabajo nos enfocaremos en la rapidez del sonido en un condensado. La relevancia de esta característica física en conexión con propiedades del condensado se mencionará más abajo, en este momento nos abocaremos única y exclusivamente a comentar la discrepancia actual existente entre modelo teórico y resultados experimentales, la cual es bastante peculiar, pues se presenta en la región de valores para la densidad en la cual una de las aproximaciones que definen el modelo de campo promedio se cumple de mejor manera [7, 8].

Existen varias maneras de deducir la rapidez del sonido en un condensado. Por ejemplo, se puede tomar como premisa inicial el Hamiltoniano de N -cuerpo, en el formalismo de segunda cuantización, para después diagonalizarlo mediante la aproximación de Bogoliubov. De esta manera se calcula la energía del sistema y al derivar respecto del volumen se deduce la presión y así, para finalizar, con esta última variable obtener la rapidez del sonido [9]. De manera adicional, se pue-

de partir de la ecuación de Gross–Pitaevskii, e incluir el límite conocido como de Thomas–Fermi para, posteriormente, poner la ecuación en la forma de dos ecuaciones hidrodinámicas (una de ellas describe las fluctuaciones en la densidad y la restante la rapidez). Para obtener la ecuación que proporciona la propagación del sonido se elimina de estas dos expresiones antes mencionadas la rapidez, y ello nos permite quedarnos con una ecuación diferencial para las fluctuaciones de la densidad [10]. En cualquier caso un elemento fundamental en la deducción de dicha rapidez radica en el empleo de la teoría de Campo Medio [11], la cual recurre a varias aproximaciones, una de ellas impone la condición de que sólo las colisiones de dos partículas son relevantes para la descripción de la dinámica del sistema en cuestión. Este modelo está basado en la, así llamada, ecuación Gibbs–Bogoliubov–Feynman [12, 13]. Este formalismo permite, siendo una idea basada en un mecanismo de minimización, el uso de diferentes tipos de eigenfunciones asociadas a las partículas que conforman el gas. En algunos casos se recurre a las eigenfunciones de una partícula atrapa en un pozo de potencial infinito [9], en tanto que en otras situaciones la elección recae sobre las eigenfunciones relacionadas con un oscilador armónico tri–dimensional isotrópico [14]. La razón detrás de esta elección radica en el hecho de que si bien el proceso, por estar relacionado con un formalismo de minimización, permite el empleo de cualquier conjunto completo de eigenfunciones, las eigenfunciones de un oscilador armónico isótropo tridimensional contienen parte de la simetría de la situación física, por lo menos la relacionada con la trampa del condensado [15].

En el presente trabajo se calculará la rapidez del sonido en un condensado de Bose–Einstein recurriendo a la ecuación generalizada de Gross–Pitaevskii, la cual recibe también el nombre de ecuación de Zaremba–Nikuni–Griffin (ZNG) [5]. La idea de ir más allá de la ecuación de Gross–Pitaevskii (GP) radica en que, como se mostrará abajo, el modelo asociado a GP parece que proporciona el orden de magnitud de dicha rapidez de manera correcta, sin embargo, los detalles finos (como la discrepancia entre teoría y experimento a bajas densidades [7, 8]) parecen estar fuera del alcance de GP. De manera adicional, la ecuación de GP es válida sólo a temperatura nula, y si bien los experimentos se suscitan a muy bajas temperaturas, nunca se llevan a cabo a $T = 0$. Es decir, al considerar GP se tiene ya una aproximación, la cual en el presente trabajo no incluiremos.

Antes de pasar a formular matemáticamente nuestro modelo explicaremos brevemente cuál es el elemento clave que, como conjetura, en este instante ponemos a consideración del lector, y que nos permitirá encontrar una explicación a esta ya comentada discrepancia. La rapidez del sonido en un condensado es un parámetro físico que depende, crucialmente, de las interacciones entre las partículas que constituyen el gas. Para ello basta recordar el modelo más simple que explica dicha rapidez [9, 15]. A muy bajas temperatura, lo cual se suscita para el caso en que un gas bosónico presenta condensación, las interacciones entre partículas están, principalmente, descritas por la dispersión de onda s , [9, 15]. Este parámetro queda definido mediante la variable conocida como longitud de dispersión. Concretando, se tiene que la rapidez en cuestión (c) tiene la siguiente dependencia funcional (siendo a la longitud de dispersión, m la masa de los constituyentes del gas, y, finalmente, n la densidad promedio de partículas)

$$c = \frac{\hbar}{m} \sqrt{4\pi a n}. \quad (10.1)$$

Esta expresión prueba que si $a = 0$, entonces no hay sonido en el condensado. De lo mostrado

en [7, 8] se desprende que, a bajas densidades, la predicción teórica es siempre menor al resultado experimental. Esta última afirmación podemos reformularla en forma de pregunta: ¿qué interacción debemos agregar para incrementar el valor teórico de la rapidez y que pueda ser compatible con los postulados contenidos en TCM? En GP se tienen interacciones de dos cuerpos que involucran, únicamente, a partículas condensadas, es decir, interacciones de dos cuerpos entre partículas condensadas y no condensadas, o no condensadas con no condensadas, no son tomadas en cuenta. Como se hará ver abajo, ZNG permite incorporar, sin abandonar la condición de interacciones por pares, un número mayor de subsistemas del condensado interactuando entre sí. En particular, en nuestro caso nos restringiremos a introducir la interacción entre condensado–condensado (como es usual en GP) pero, adicionalmente, condensado–nube térmica (parte no condensada). Probaremos que este formalismo permite explicar la discrepancia mostrada en [7, 8]) y que de manera colateral nos permitirá deducir una expresión para la rapidez del sonido la cual será función del punto del condensado en el cual la medición se lleve a cabo. Es decir, la expresión final proporciona una rapidez que no es constante en el condensado. La elección recará sobre la ecuación conocida como ZNG [5]. Siendo que TCM implica únicamente interacciones por pares, toda nueva interacción deberá de ser contemplada dentro de este ámbito.

Mostraremos una rapidez del sonido que será función de la distancia al centro geométrico de la trampa. Más puntualmente, probaremos que la velocidad crecerá conforme nos alejemos del centro de la trampa. Es decir, los efectos de la trampa sobre las partículas aumenta al alejarse éstas del centro geométrico de la trampa. En otras palabras, la interacción con la trampa define de manera importante el comportamiento de la rapidez del sonido en un condensado, por lo menos en el sentido que podremos explicar algunas sutilezas surgidas del trabajo en laboratorios. Este resultado nos proporcionará una explicación a la discrepancia previamente señalada. En particular aplicaremos nuestro modelo al caso de un condensado de sodio, y veremos como es posible hacer compatibles experimento con modelo teórico.

Independientemente de poder resolver el problema actual entre predicciones teóricas y resultados experimentales es importante tener un buen modelo en torno al análisis de la rapidez del sonido en un condensado. Las razones detrás de esta afirmación se pueden entender recordando que el estudio de este parámetro permite analizar el papel que juegan las excitaciones de momento en la determinación de algunas propiedades físicas [16, 17]. Otro punto interesante que involucra una relación causal entre rapidez del sonido y la presencia de interacciones está asociada al hecho de que la relación de dispersión para las excitaciones elementales depende críticamente del tipo de interacciones entre los constituyentes del gas [14]. en otras palabras, un análisis de la relación de dispersión nos permite tener una mejor comprensión sobre las interacciones entre átomos.

10.2. Rapidez del sonido en un condensado

10.2.1. Rapidez del sonido y ecuación de Gross–Pitaevskii

En esta parte mostraremos que el formalismo de GP difícilmente podrá resolver la discrepancia contenida en [7, 8]). Consideremos el Hamiltoniano asociado a un sistema de N -cuerpos con

potencial externo $V_{(e)}$ y de interacción entre dos cuerpos V .

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\alpha, \beta} \langle \alpha | \nabla^2 | \beta \rangle \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \epsilon} \langle \alpha, \beta | V | \gamma, \epsilon \rangle \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta^\dagger \hat{a}_\gamma \hat{a}_\epsilon + \sum_{\alpha} \langle \alpha | V_{(e)}(\vec{r}) | \beta \rangle \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta,$$

$$\langle \alpha | \nabla^2 | \beta \rangle = \int u_\alpha^*(\vec{r}) \nabla^2 u_\beta(\vec{r}) d^3r, \quad \langle \alpha | V_{(e)} | \beta \rangle = \int u_\alpha^*(\vec{r}) V_{(e)}(\vec{r}) u_\beta(\vec{r}) d^3r,$$

$$\langle \alpha, \beta | V | \gamma, \epsilon \rangle = \int u_\alpha^*(\vec{r}) u_\beta^*(\vec{r}) V(\vec{r}) u_\gamma(\vec{r}) u_\epsilon(\vec{r}) d^3r.$$

Aquí usaremos las eigenfunciones asociadas a un oscilador armónico isótropo tri-dimensional. Usualmente se considera, para el cálculo de la rapidez del sonido, sólo a la parte condensada. En esta parte tomaremos la parte de energía cinética asociada a la nube térmica. Se debe enfatizar que no se introducirá nube térmica en la dos últimas integrales. Es decir, las colisiones continúan despreciando los efectos de la nube térmica.

Para determinar el número de partículas en estado base y estados excitados se recurrirá a las siguientes expresiones [15]

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 + \frac{8}{3} \sqrt{\frac{a^3 N}{V \pi}} \right], \quad (10.2)$$

$$N_e = N \left[\left(\frac{T}{T_c} \right)^3 - \frac{8}{3} \sqrt{\frac{a^3 N}{V \pi}} \right]. \quad (10.3)$$

De esta manera se obtienen

$$\begin{aligned} \langle \psi_N | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_N \rangle &= \frac{3\hbar\omega}{4} N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 + \frac{8}{3} \sqrt{\frac{a^3 N}{V \pi}} \right] \\ &\quad + \frac{5\hbar\omega}{4} N \left[\left(\frac{T}{T_c} \right)^3 - \frac{8}{3} \sqrt{\frac{a^3 N}{V \pi}} \right], \end{aligned}$$

$$\langle 0, 0 | V | 0, 0 \rangle = \frac{32}{\sqrt{\pi} l^3} \int_0^\infty r^2 V(r) \exp\left\{-\frac{r^2}{l^2}\right\} dr.$$

$$a = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int_0^\infty r^2 V(r) \exp\left\{-\frac{r^2}{l^2}\right\} dr.$$

Finalmente, la energía del condensado se puede escribir como

$$\begin{aligned} E(T) = & \frac{3\hbar^2}{2mV^{2/3}} N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 + \frac{8}{3} \sqrt{\frac{a^3 N}{V\pi}} \right] + \\ & \frac{5\hbar^2}{2mV^{2/3}} N \left[\left(\frac{T}{T_c}\right)^3 - \frac{8}{3} \sqrt{\frac{a^3 N}{V\pi}} \right] + \\ & \frac{2\pi a \hbar^2}{mV} N^2 \left[3 - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{a^3 N}{V\pi}} \right] \end{aligned}$$

La presión y rapidez del Sonido en el condensado son fácilmente calculables

$$\begin{aligned} P(T) = & \frac{\hbar^2}{mV^{5/3}} N + \frac{2\hbar^2}{3mV^{5/3}} N \left[\left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \right. \\ & \left. - \frac{17}{3} \sqrt{\frac{a^3 N}{V\pi}} + \frac{2\pi a \hbar^2}{mV^2} N^2 \left[3 - 2 \sqrt{\frac{a^3 N}{V\pi}} \right] \right], \\ c_s^2(T) = & \frac{5\hbar^2}{3m^2V^{2/3}} + \frac{10\hbar^2}{3m^2V^{2/3}} \left[\left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \right. \\ & \left. - \frac{68}{15} \sqrt{\frac{a^3 N}{V\pi}} + \frac{4\pi a \hbar^2}{m^2V} N \left[3 - \frac{5}{2} \sqrt{\frac{a^3 N}{V\pi}} \right] \right]. \end{aligned}$$

Para el caso de sodio podemos estimar nuestra predicción con los siguientes valores: $N = 5 \times 10^6$, $n = 10^{21} m^{-3}$, $T_c = 2 \times 10^{-6} K$, $m = 35,2 \times 10^{-27} Kg$, $l \sim 10^{-2} m$, $a = 2,75 \times 10^{-9} m$, $T = 0,9 T_c$.

$$c_s = 2,2 \times 10^{-3} m/s.$$

El resultado experimental indica [7, 8]

$$c_s = 5,1 \times 10^{-3} m/s.$$

El orden de magnitud es correcto, pero no checa con los resultados teóricos. En esta situación hemos empleado un modelo que es, en cierto sentido, equivalente a la ecuación de Gross–Pitaevskii. En nuestro caso se ha incluido, en la energía cinética la contribución de la nube térmica, hecho que

está ausente en Gross–Pitaevskii. Sin embargo, como se mencionó en el momento oportuno, nuestro cálculo no incluye interacciones por pares, por ejemplo, entre átomo condensado y un átomo no-condensado.

Parece que la compatibilidad entre experimentos y teoría se podría conseguir incluyendo las interacciones, como elemento total, en la descripción del condensado. Ya hemos mencionado la relevancia de las interacciones dentro de la explicación de la rapidez del sonido en un condensado de Bose–Einstein. En realidad, la presencia de interacciones, en la descripción de la rapidez de propagación de perturbaciones, es un factor presente inclusive en física clásica. Para ilustrarlo, y así proporcionar un argumento más sólido a nuestra siguiente propuesta, recordemos que en el caso de una cuerda ideal, al provocar una perturbación con una amplitud suficientemente pequeña la rapidez de propagación de dicha perturbación es [18]

$$c = \sqrt{T/\mu}. \quad (10.4)$$

En esta última expresión T y μ son la tensión en la cuerda y la densidad lineal de masa. La tensión es un parámetro que cuantifica la interacción entre las partes que constituyen la cuerda. Además, el resultado muestra que a mayor tensión, más rápido se propaga el fenómeno. Este argumento, y el previo en relación con un condensado y la relación causal interacción–rapidez del sonido, nos permiten conjeturar que, tal vez, la discrepancia antes comentada [7, 8] podría resolverse incrementando el número de interacciones en el condensado. Para finalizar esta argumentación, agregaremos que, si bien las colisiones en un gas diluido son poco frecuentes, las interacciones binarias en un condensado son muy importantes en la determinación de respuestas colectivas, y ello es debido a que en un condensado el campo medio coherente es muy grande.

10.2.2. Rapidez del sonido y ecuación de Zaremba–Nikuni–Griffin

Como ya ha sido previamente mencionado consideraremos un modelo que contenga más interacciones que aquellas contempladas en GP. La elección cae sobre la ecuación conocida como ZNG [5]. Puesto que TCM implica, de manera inexorable, únicamente interacciones por pares, toda nueva interacción deberá de ser restringida a este ámbito. De manera adicional, la ecuación de GP es válida sólo a temperatura nula, y si bien los experimentos se suscitan a muy bajas temperaturas, nunca se llevan a cabo a $T = 0$. Es decir, al considerar GP se tiene una aproximación, la cual en el presente trabajo no incluiremos. En nuestro modelo teórico no se asume el caso de temperatura nula. Sin embargo, es importante recalcar que el modelo requiere temperaturas suficientemente altas, esto significa, $T \geq 0,4T_c$ [5].

Comencemos con la ecuación diferencial que gobierna la dinámica de un operador cuántico de campo ($\hat{\psi}(\vec{r}, t)$).

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{trap}(\vec{r}) \right] \hat{\psi}(\vec{r}, t) + \eta(\vec{r}, t) + g \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \hat{\psi}(\vec{r}, t) \hat{\psi}(\vec{r}, t). \quad (10.5)$$

Donde aquí se tiene $V_{trap}(\vec{r})$ es potencial asociado a la trampa, y $g = 4a\pi\hbar^2/m$, siendo m la masa de los átomos del condensado y a la longitud de dispersión.

La deducción de la ecuación para la función de onda del condensado requiere de tomar un promedio con respecto a un ensemble fuera de equilibrio con rompimiento de simetría ($\Psi(\vec{r}, t) = \langle \hat{\psi}(\vec{r}, t) \rangle$). Adicionalmente, y de acuerdo a las ideas de Bogolibov y Beliaev, se separa la componente del condensado del operador cuántico de campo [5] $\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \langle \hat{\psi}(\vec{r}, t) \rangle + \phi(\vec{r}, t)$, con la condición $\langle \phi(\vec{r}, t) \rangle = 0$. Al llevar a cabo estas operaciones se obtiene la siguiente expresión conocida com ecuación de Zaremba–Nikuni–Griffin [5]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{trap}(\vec{r}) + gn_c(\vec{r}, t) + 2g\tilde{n}(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t) + gs(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) + gb(\vec{r}, t). \quad (10.6)$$

Aquí $n_c(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$ es la densidad de la parte condensada; $\tilde{n}(\vec{r}, t) = \langle \phi^\dagger(\vec{r}, t)\phi(\vec{r}, t) \rangle$ la densidad de la nube térmica; $s(\vec{r}, t) = \langle \phi^\dagger(\vec{r}, t)\phi(\vec{r}, t) \rangle$ la densidad anómala; y $b(\vec{r}, t) = \langle \phi^\dagger(\vec{r}, t)\phi(\vec{r}, t)\phi(\vec{r}, t) \rangle$.

No está de más señalar que esta expresión contiene la información sobre la nube térmica, es decir, sobre aquella porción del gas que no está condensada. La presencia de interacciones hace, que aún a temperatura nula, la parte no condensada no sea nula [9, 15]. Una aproximación que si ha sido empleada es la de interacciones sólo por pares. Esta suposición es uno de los postulados de TCM [13].

Como primer caso a estudiar despreciaremos la densidad anómala y el término asociado a la función de correlación de tres campos, es decir, $b(\vec{r}, t) = s(\vec{r}, t) = 0$. Es factible probar que los términos despreciados son de orden cuadrático en a/l , es decir, $b(\vec{r}, t) = s(\vec{r}, t) \sim a/l$. Claramente las densidades de la parte condensada y no condensada no tienen este comportamiento. Podemos entonces concluir que como primera aproximación los elemntos considerados son de mayor importancia que los dejados fuera.

Además $n_c(\vec{r}, t)$ y $\tilde{n}(\vec{r}, t)$ no dependen de t . Esto último se entiende como una consecuencia de tener equilibrio termodinámico, pues las densidades del condensado y de la nube térmica no son función del tiempo. Bajo estas condiciones ZNG se reduce a

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{trap}(\vec{r}) + gn_c(\vec{r}) + 2g\tilde{n}(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t). \quad (10.7)$$

No existen teoremas que garanticen la existencia de soluciones de ecuaciones como la última. Sólo se tienen teoremas de existencia para ecuaciones de la forma [19].

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + g|\Psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \Psi(\vec{r}, t). \quad (10.8)$$

Este comentario nos conduce a buscar una solución a nuestra ecuación en forma perturbativa. La idea es aquí encontrar un parámetro pequeño, el cual nos sirva para poder hacer un desarrollo

asintótico. Consideraremos como potencial atrapante aquel asociado a una trampa tipo oscilador armónico isótropo tri-dimensional. Esta elección se fundamenta en el hecho de que las trampas experimentales pueden, con gran grado de precisión, aproximarse mediante potenciales tipo osciladores tri-dimensionales [15]. Es decir

$$V_{trap}(\vec{r}) = \frac{m\omega^2}{2}r^2 \quad (10.9)$$

Aquí se tiene que el origen de coordenadas coincide con el centro geométrico del condensado. Buscaremos soluciones estacionarias, es decir, asumiremos

$$\Psi(\vec{r}, t) = \exp\{-i\mu t/\hbar\}\phi(\vec{r}). \quad (10.10)$$

Supondremos además que la densidad condensada está descrita las eigenfunciones del estado base asociado a la trampa arriba mencionada, en tanto que la densidad de la nube térmica tiene una descripción dada por la eigenfunción del primer estado excitado conectado con la trampa empleada. Esto es

$$n_c(\vec{r}) = |\Phi_0(\vec{r})|^2, \quad \tilde{n}(\vec{r}) = |\Phi_1(\vec{r})|^2. \quad (10.11)$$

Siendo $\Phi_n(\vec{r})$ las eigenfunciones del oscilador armónico isótropo tri-dimensional [20]. La ecuación ZNG se transforma en (μ es el potencial químico)

$$\mu\phi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}r^2 + gn_c(\vec{r}) + 2g\tilde{n}(\vec{r}) \right]\phi(\vec{r}). \quad (10.12)$$

Nótese que los términos de esta última ecuación involucrados con las densidades del condensado y de la nube térmica ambos tienen como elemento fundamental a la constante g , la cual es proporcional a la longitud de dispersión, a . Por otro lado, toda densidad involucra dividir la cantidad en cuestión entre el volumen que ocupa el sistema. En nuestro caso, el volumen queda definido por la única cantidad de distancia que aparece en conexión con un oscilador armónico [20]

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad (10.13)$$

$$V = l^3. \quad (10.14)$$

Con esta observación llegamos a la conclusión de que nuestra ecuación tiene la siguiente estructura

$$\mu\phi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}r^2 + \frac{a}{l}f(\vec{r}) \right]\phi(\vec{r}).$$

Pero experimentalmente sabemos que

$$a/l < 1. \quad (10.15)$$

Usaremos este parámetro (a/l) como elemento para nuestro desarrollo asintótico. La idea es considerar a las dos densidades como términos perturbativos y emplear la teoría correspondiente para encontrar las correcciones, tal como se hace en mecánica cuántica [21].

La corrección a primer orden (en a/l) de la función de onda de la parte condensada es

$$\Phi_0^{(1)}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{N}{V\pi^3}} \left\{ 1 + \frac{aN}{12\pi^{1/2}V^{1/3}} \left(4\frac{r^2}{l^2} - 6 \right) \right\} \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) \quad (10.16)$$

La densidad del condensado es

$$n_c^{(1)}(\vec{r}) = |\Phi_0^{(1)}|^2 \quad (10.17)$$

La corrección a primer orden al potencial químico μ es

$$\mu^{(1)} = \frac{3\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{V^{2/3}} + \frac{4\pi a\hbar^2 N}{(2\pi)^{3/2}V} \right] \quad (10.18)$$

Nótese que la corrección a primer orden de la función de onda de la parte condensada involucra al segundo estado excitado asociado a un oscilador armónico isótropo tri-dimensional, pero no al primer estado excitado, el cual lo hemos supuesto conectado con el estado a orden cero de la nube térmica.

Para calcular la rapidez del sonido en estas condiciones recordemos que dicha cantidad está dada por la expresión [5]

$$c_s = \frac{N}{mV} \frac{\partial\mu}{\partial n}. \quad (10.19)$$

Con esta expresión se obtiene para nuestro caso en particular la siguiente rapidez del sonido para el caso de un condensado confinado mediante una trampa tipo oscilador armónico tri-dimensional isótropo

$$c_s = \frac{\pi^{1/2} \hbar}{mV^{1/3}} \left[1 - \frac{6\pi aN}{(2\pi)^{3/2} V^{1/3}} - \frac{2aN}{9\pi V^{1/3}} \left(4\frac{r^2}{l^2} - 6 \right) + \frac{2r^2}{3V^{2/3}} - \frac{aN}{3\pi V} r^2 \right] \exp\left(\left[\frac{r}{l}\right]^2\right). \quad (10.20)$$

Este último resultado es lo que deseabamos deducir, donde se debe tener que $0 \leq r \leq l$.

10.3. Discusión y resultados

En el presente trabajo se ha mostrado que los modelos que consideran, en un condensado, sólo interacciones entre átomos de la parte condensada permiten deducir de manera correcta el orden de magnitud de la rapidez del sonido. Sin embargo, también se ha hecho patente que difícilmente pueden proporcionar los detalles sutiles que permitan resolver la discrepancia contenida en algunos resultados experimentales [7, 8]. Es decir, GP parece no dar respuesta a la inconsistencia antes mencionada.

Posteriormente se hizo notar la importancia que tiene el concepto de interacción en la propagación de algunas perturbaciones, y entre ellas se mencionaron la rapidez del sonido en condensados [9] y de perturbaciones en una cuerda [18]. Este hecho nos permitió conjeturar que la solución buscada podría estar más allá de GP. Se dedujo ZNG, la cual es una generalización de GP, y se hizo ver que contiene varios tipos de interacciones que están ausentes en GP. Por ejemplo, ZNG considera interacciones entre los átomos condensados y los no condensados. Se hizo ver que GP asume que se está a temperatura nula, y que además todos los constituyentes del gas se encuentran en el estado condensado. Se argumentó que ambas suposiciones no son, estrictamente, ciertas en un experimento, pues no es factible conseguir temperatura nula [22], según la termodinámica clásica, y además, aunque dicha temperatura fuese alcanzable, la presencia de interacciones hace imposible que todas las partículas del gas se condensen [9].

La elección hecha recayó sobre la ecuación conocida como ZNG [5]. Esto se ha llevado a cabo sin abandonar TCM, es decir, incluyendo únicamente interacciones por pares. No hemos asumido temperatura nula, pero el modelo si requiere temperaturas suficientemente altas, esto significa, $T \geq 0,4T_c$ [5]. Se consideró solamente la densidad de la parte no condensada, esto implica que otras dos cantidades, la densidad anómala y la función de correlación de tres campos se hicieron nulas. Es factible probar que los términos despreciados son de orden lineal en a/l , es decir, menores que las densidades de la parte condensada y no condensada. En otras palabras, como primera aproximación la ecuación que hemos resuelto contiene los elementos físicos más relevantes. La ecuación asumió equilibrio termodinámico, pues las densidades involucradas se han supuesto iondependientes del tiempo. Esta última simplificación nos ha permitido buscar soluciones estacionarias a la ecuación final. Empleando un método asintótico, en el parámetro a/l hemos resuelto nuestra versión de ZNG. Considerando que a orden cero en nuestro parámetro el condensado y la nube térmica se encuentran, respectivamente, en el estado base y primer estado excitado de un oscilador armónico tri-dimensional isótropo, se ha mostrado que a primer orden la función de onda

de la parte condensada adquiere una contribución proveniente de la función de onda del segundo estado excitado. De manera adicional se ha encontrado la modificación del potencial químico.

La última ecuación deducida ha sido la rapidez del sonido en el condensado. Una mirada a esta expresión nos señala que dicho parámetro depende de la zona en la cual se realice la medición. Esto puede constatarse notando que depende de la variable r , siendo el origen de coordenadas coincidente con el centro geométrico del condensado. Nótese que la velocidad del sonido es función sólo de potencias pares de r . Esta observación implica que tenemos una simetría en relación con la inversión de los ejes coordenadas. Es decir, si hacemos los cambios de variables $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$, o $z \rightarrow -z$, la rapidez no se ve modificada. Algo esperado, pues no podría depender de la elección de nuestros ejes coordenados.

Este factor nos podría, como una posibilidad, explicar la discrepancia entre teoría y experimento, en relación con la medición del sonido en un condensado de sodio [7, 8]. Efectivamente, la velocidad empleada como resultado teórico en los dos trabajos experimentales es constante a lo largo y ancho del condensado. Es decir, el experimento fue contrastado contra un cálculo en el cual la rapidez del sonido del condensado es un parámetro independiente del punto de medición. En nuestro resultado dicho factor no es constante. Si a densidades bajas la detección de la rapidez del sonido se hizo en una zona diferente a la de aquella relacionada con el caso de altas densidades, entonces nuestro resultado explica la discrepancia tantas veces aquí comentada.

Pasemos ahora a encontrar los cambios en la rapidez para el caso de un condensado de sodio. Para ello tomaremos los datos mencionados en [7, 8].

$$\frac{\pi^{1/2}\hbar}{mV^{1/3}} = 3,5 \times 10^{-3} m/s, \quad \frac{aN}{V^{1/3}} \sim 10^{-2}. \quad (10.21)$$

Para el caso en el cual la rapidez del sonido se midiese en el centro de la trampa, lo cual equivale a considerar $r = 0$, se deduce

$$c_s(r = 0) = 3,45 \times 10^{-3} m/s. \quad (10.22)$$

Si ahora nos desplazamos cerca del final del condensado (aquí como primera aproximación se puede considerar que en los tres ejes el condensado tiene un tamaño igual a l), por ejemplo, $r = (0,8)l$ el resultado cambia notablemente

$$c_s(r = (0,8)l) = 6,54 \times 10^{-3} m/s. \quad (10.23)$$

El cambio porcentual, respecto a $c_s(r = 0)$, es notable, casi del 90 por ciento.

$$[c_s(r = (0,8)l) - c_s(r = 0)]/c_s(r = 0) \times 100 = 89,5 \quad (10.24)$$

Es evidente que la deficiencia comentada, los datos teóricos yacen en los primeros modelos debajo de los casos experimentales, ahora si se aproximan mejor. En otras palabras, nuestro caso parece resolver el problema que nos ha ocupado a lo largo de este trabajo. Un punto merece ser mencionado en relación con el comportamiento de la rapidez con respecto a la variable r . Puede verse que como función de r nuestra expresión es una función estrictamente creciente. Este hecho podría parecer contra intuitivo, pues la densidad decrece al aumentar r , recuérdese que la densidad es proporcional a las eigenfunciones de un oscilador armónico tri-dimensional e isótropo. Sin embargo, no debemos dejar caer en el olvido que, además de este comportamiento, tenemos un factor de gran peso en la definición de la dinámica del condensado, a saber, el hecho de que, si bien la interacción entre átomos no cambia, los efectos de la trampa sobre las partículas aumenta al alejarse éstas del centro geométrico de la trampa. Si aceptamos el argumento señalado anteriormente, en el sentido de que a mayor interacción la velocidad de propagación de una señal crece, entonces podemos entender este hecho, pues la interacción entre trampa y partículas se vuelve más importante conforme los constituyentes del gas se alejan del centro de la trampa. Es decir, la interacción con la trampa define de manera importante el comportamiento de la rapidez del sonido en un condensado.

Este resultado puede ser comprendido desde una perspectiva diferente, a saber, aquella que involucra las fluctuaciones de la densidad. Efectivamente, nótese que nuestros resultados implican, entre otras cosas, que la densidad del condensado decrece conforme nos alejamos del centro geométrico de la trampa, para constatar esta afirmación basta recordar que la densidad queda descrita como una función proporcional a una combinación lineal de las eigenfunciones de un oscilador armónico tri-dimensional isótropo. Estas funciones son decrecientes al aumentar r [20]. Sin embargo, la propagación del sonido no está relacionada directamente con la densidad, sino con fluctuaciones de ésta. Es decir, nuestro resultado prueba que la densidad decrece al alejarnos del centro de la trampa. Sin embargo, también nos conduce a concluir que las fluctuaciones en la densidad aumentan, y este factor se deriva de las características de la trampa en cuestión. En otras palabras, las fluctuaciones en la densidad aumentan conforme la intensidad del potencial confinante crece, y por ello la rapidez del sonido es una función monótona creciente de r .

Pasemos ahora a discutir los dos términos despreciados en nuestro modelo, es decir, la densidad anómala y la función de correlación de tres campos. Los dos están relacionados con factores de amortiguamiento inducidos por colisiones en el movimiento del condensado [5]. Es en este punto en donde la ecuación de Boltzmann surge. Para ilustrar este aspecto mencionemos, brevemente, que la función de correlación de tres campos está relacionada con la función de distribución de partícula individual, y que este parámetro es parte fundamental de la ecuación de Boltzmann [23]. Este comentario nos permite concluir que todo intento por encontrar una generalización relativista de la ecuación de Zaremba–Nikuni–Griffin requiere, como condición inicial, la versión relativista de la ecuación de Boltzmann. En este contexto existen ya varios resultados [24], si bien no existe todavía un consenso en cuanto a la validez de las propuestas existentes.

En cuanto a las posibilidades que el cálculo de este trabajo ofrece en relación con pruebas de precisión en gravitación comentemos la opción de el Principio de Equivalencia Fuerte (PEF) [25]. La idea es calcular los efectos que el campo gravitacional podría tener sobre la rapidez del sonido de un condensado. Con dicho cálculo se procede de la siguiente manera. De acuerdo con PEF un condensado en caída libre debe tener una rapidez del sonido igual a la de un condensado en el cual

el campo gravitacional está ausente [25]. Efectivamente, según PEF, en un sistema de referencia en caída libre las leyes de la física quedan determinadas por la relatividad especial, es decir, todo se suelta como si el campo gravitacional no existiese. De esta manera al comparar el resultado del experimento contra el cálculo se podría tener una manera de poner a prueba PEF. Pero para poder tener esta posibilidad es necesario determinar los efectos del campo gravitacional sobre la rapidez. En el caso de un campo gravitacional homogéneo el potencial químico se vería modificado, pues la energía de las partículas que constituyen el gas se modificaría por este término adicional. De manera similar, la densidad de partículas mostraría ahora un valor mayor en las partes más bajas del condensado, debido a la presencia del campo gravitacional. En otras palabras, tanto potencial químico como densidad incluirán, como parte de sus parámetros, el valor del campo gravitacional, aquí considerado en su situación más simple, a saber, un campo gravitacional homogéneo. Siendo la rapidez del sonido en el condensado función de la derivada del potencial químico como función de la densidad debemos esperar una dependencia del sonido en términos del campo gravitacional homogéneo. En otras palabras, se espera tener una herramienta experimental, por lo menos en principio, para poner a prueba PEF. Por supuesto, queda como pregunta abierta la factibilidad de la propuesta, y para ello se requiere conocer la incertidumbre experimental en la medición de la rapidez. Otra manera de poner a prueba PEF radica en recurrir a la expresión relacionada con el potencial químico, véase (18). La presencia de un campo gravitacional homogéneo implicaría modificar (18) de la siguiente manera

$$\mu^{(1)} = \frac{3\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{V^{2/3}} + \frac{4\pi a\hbar^2 N}{(2\pi)^{3/2} V} \right] + mgL \quad (10.25)$$

En esta última expresión L es la altura, respecto a la superficie terrestre, a la cual se encuentra localizado el condensado. Recordando que la temperatura de condensación es función del potencial químico [23] entonces es evidente que detectando la temperatura de condensación se podría poner también a prueba PEF, por lo menos en principio. Es decir, la rapidez del sonido en un condensado permitiría obtener dos herramientas de precisión, independientes entre sí.

Bibliografía

- [1] S. N. Bose. Plancksgesetz und Lichtquantenhypothese. *Zeits. fur Physik*, 26:178, 1924.
- [2] M. H. Anderson et al. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science*, 269:198, 1995.
- [3] K.B. Davis et al. Bose-Einstein condensation in a Gas of Sodium Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3960, 1995.
- [4] D. A. Griffin, Wen-Chin Wu, and S. Stringari. Hydrodynamic Modes in a Trapped Bose Gas above the Bose-Einstein Transition. *Phys. Rev. Lett.*, 78:1838, 1997.

-
- [5] A. Griffin, T. Nikuni, and E. Zaremba. *Bose–Condensed Gases at Finite Temperatures*. University Press, Cambridge, 2009.
- [6] F. Dalfovo et al. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, 71:463–512, 1999.
- [7] M. R. Andrews et al. Propagation of Sound in a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 79: 553–556, 1997.
- [8] M. R. Andrews et al. Erratum: Propagation of Sound in a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 80: 2967, 1998.
- [9] M. Ueda, *Fundamentals and New Frontiers of Bose–Einstein Condensation* World Scientific-Publishing Co., Singapore, 2010.
- [10] E. Zaremba. Sound propagation in a cylindrical Bose-condensed gas. *Phys. Rev. A*, 57:518–521, 1998.
- [11] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky. *Principles of condensed matter physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [12] R. P. Feynman and A. R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Mc–Graw–Hill, New York, 1965.
- [13] D. Prato and D. E. Barraco. Bogoliubov inequality *Rev. Mex. Fis.* 42:145–150, 1996.
- [14] S. Stringari. Collective Excitations of a Trapped Bose-Condensed Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 77:2360–2363, 1996.
- [15] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [16] D. M. Stamper et al. Excitation of Phonons in a Bose-Einstein Condensate by Light Scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 83:2876, 1999.
- [17] S. B. Papp et al. Bragg Spectroscopy of a Strongly Interacting 85Rb Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 101:135301, 2008.
- [18] R. Guenther. *Modern Optics*. John Wiley and Sons, New York, 1990.
- [19] C. Sulem and P. L. Sulem. *The Nonlinear Schrödinger equation*. Springer–Verlag, Heidelberg, 1999.
- [20] C. Cohen–Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Quantum Mechanics, Vol. 1*. John Wiley and Sons, New York, 1977.
- [21] C. Cohen–Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Quantum Mechanics, Vol. 2*. John Wiley and Sons, New York, 1977.

10.3. Bibliografía

- [22] L. García-Colín Scherer. *Introducción a la Termodinámica Clásica*. Trillas, México, 2005.
- [23] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*. Butterworth Heineman, Oxford, 1996.
- [24] C. Cerciganni and G. M. Kremer. *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications Model Equations*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2002.
- [25] C. M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics* Cambridge University Press., Cambridge, 1993.

Apéndices

Ferencz Jüttner

Ferencz Jüttner nació en Breslau¹ en 1878. Realizó sus estudios en la Universidad Friedrich-Wilhelms de Breslau, donde también trabajó tiempo después y desde donde firma la mayoría de sus trabajos. Presentó la defensa de su doctorado en enero de 1902 con la tesis titulada “*Beiträge zur chemischen Auffassung des Lösungsvorganges*” (Contribuciones a la concepción química del proceso de solución). Hizo contribuciones en varias áreas de la física tales como difusión en sistemas con reacciones químicas², en la teoría de la relatividad Jüttner estudió las colisiones relativistas en marcos de referencia en movimiento³. En 1922 calculó el campo gravitacional estático para el caso esféricamente simétrico de algunas variantes de la teoría geométrica de Weyl, la cual intentaba unificar la gravitación y el electromagnetismo⁴. También contribuyó a los fundamentos conceptuales de parte de la teoría cuántica⁵.

La contribución más importante de Ferencz Jüttner se concentra en sus tres trabajos en relación con los gases en equilibrio en la teoría de la relatividad. Los dos primeros aparecieron en 1911 en los “*Annalen der Physik und Chemie*” (cuyas versiones en español se incluyen en el presente

¹Provincia de Silesia, actualmente Wrocław en Polonia, pero que perteneció a Bohemia, parte del Imperio Austro-Húngaro, Prusia y Alemania en distintas épocas.

²F. Jüttner, *Reaktionskinetik und Diffusion*, Z. Physik. Chem. **65** 595 (1909).

³F. Jüttner, *Die Gesetze des Stosses in der Lorentz-Einsteinschen Relativtheorie*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **62** 410-433 (1913).

⁴F. Jüttner, *Beiträge zur Theorie der Materie*, Math. Annalen **87** 270-306 (1922).

⁵F. Jüttner, *Begriffliche Grundlagen und Begriffsbezeichnungen der Quantentheorie*, Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei **109**, 139-146 (1938).

volumen), donde estudian los gases relativistas en equilibrio, en un marco en reposo y uno en movimiento⁶. El siguiente trabajo de 1928 estudió los gases relativistas que obedecen las estadísticas cuánticas de Bose-Einstein y Fermi Dirac, que se habían propuesto en 1924 y 1926 respectivamente⁷.

Siguiendo el consejo de Max Planck, con quien Jüttner se encontraba en Berlín en una estancia posdoctoral, abordó el problema y encontró la distribución de un gas en equilibrio formado de partículas relativistas, a través de un proceso de maximización de la entropía. Planck se había dado cuenta de que, dado el principio de la relatividad especial acerca de la constancia de la velocidad de la luz, sería necesaria una modificación a la función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann ya que en esta distribución no hay un límite para las velocidades de las partículas, las cuales pueden, en principio tener velocidades infinitas.

Entre las características de la distribución encontrada por Jüttner, se encuentra que existe un límite natural para la velocidad de las partículas dado por la velocidad de la luz. Además, existe una transición suave entre los regímenes no relativista y ultra relativista, en el primer caso se aproxima la distribución de Maxwell-Boltzmann, mientras en el segundo se tiene una distribución angosta centrada en la velocidad de la luz. Es interesante mencionar que en sus trabajos Jüttner no estuvo muy alentado con los resultados obtenidos ya que parecían no tener aplicaciones; ciertamente menciona que dichos resultados son esencialmente teóricos y que aún no se conocía sistema alguno donde aplicarlos.

Fue Miembro de la Sociedad Alemana de Física de 1921 hasta 1945. Además de Berlín, Jüttner también trabajó en la Facultad de Física de la Universidad de Munich.

Murió en 1958 a la edad de 80 años.

⁶F. Jüttner, *Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung der Relativtheorie*. Ann. Physik und Chemie **34**, 856 (1911). F. Jüttner, *Die dynamik eines bewegten Gases in der Relativtheorie*. Ann. Physik und Chemie **35**, 145 (1911)

⁷F. Jüttner, *Die relativistische Quantentheorie des idealen Gases*. Zeitschr. Phys. **47** (1928) 542.



Ley de Maxwell para la distribución de velocidades en la teoría de la relatividad

Ferencz Jüttner¹

Versión al español y comentarios:

Guillermo Chacón Acosta

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas, Universidad Autónoma Metropolitana-Cuajimalpa, México D. F. 01120, México

Leopoldo García-Colín Scherer

Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, México D. F. 09340, México, El Colegio Nacional, Luis González Obregón 23, Centro Histórico, México D. F. 06020, México

Ertan Göklü

ZARM - Center of Applied Space Technology and Microgravity, University Bremen, Am Fallturm 28359 Bremen, Alemania,

Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, México D. F. 09340, México

¹ *Título original: Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung der Relativtheorie.* Ann. Physik und Chemie **34**, 856 (1911).

B.1. La entropía de un gas monoatómico estático en un estado arbitrario

A partir de la entropía S de un gas monoatómico ideal que está en un determinado estado utilizando su definición general

$$S = k \ln W, \quad (\text{B.1})$$

donde W es la probabilidad del estado, para calcular y deducir las propiedades termodinámicas del gas, hay que tener en cuenta una cierta base mecánica. Hasta ahora siempre se ha elegido la mecánica Newtoniana. Desde el punto de vista del principio de la relatividad especial de Albert Einstein, ésta (la mecánica newtoniana) es sólo un límite de una mecánica más general, y podría ser de interés investigar la entropía de una gas en reposo ² y con la ayuda de esto calcular la ley de distribución de las velocidades en el estado de equilibrio suponiendo la validez de la mecánica relativista; así se podrían deducir conjuntamente expresiones para la ecuación de estado del gas y la dependencia de la energía, entropía y la energía libre con la temperatura (los calores específicos, ecuaciones adiabáticas).

Es un placer para mí expresar mi más cálido agradecimiento a Hrn. Geheimrat ³ M. Planck por su amable sugerencia de este trabajo y por su benevolente asesoría.

B.1. La entropía de un gas monoatómico estático en un estado arbitrario

De los conceptos de la mecánica relativista [1], para describir la teoría cinética de los gases hay que considerar en primer lugar las componentes del momento (ímpetu) ξ, η, ζ de una partícula material que se mueve con velocidad

$$q = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

con masa (en reposo) m

$$\xi = m\mathfrak{x}, \quad \eta = m\mathfrak{y}, \quad \zeta = m\mathfrak{z}, \quad (\text{B.2})$$

donde

$$\mathfrak{x} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad \mathfrak{z} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad (\text{B.3})$$

son los componentes reducidos del momento (ímpetu) por unidad de masa. c es la velocidad de la luz.

²N. T. Marco inercial comóvil.

³N. T. Puesto en el gobierno alemán que fungía como consejero particular.

Además, para una partícula puntual de masa m es importante la expresión para la *fuerza viva*⁴:

$$L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}. \quad (\text{B.4})$$

Para calcular la probabilidad W para un estado arbitrario de un gas monoatómico ideal en reposo es conveniente escoger como variables, para describir el estado del sistema, las tres coordenadas x, y, z y las tres componentes reducidas del momento (ímpetu) $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ de cada molécula las cuales se pueden pensar como partículas masivas puntuales con masa (en reposo) m y velocidad variable q .

Se utilizan las ecuaciones Hamiltonianas de la teoría de la relatividad [2] para el movimiento de las partículas puntuales, así que por el teorema de Liouville, en el espacio de seis dimensiones de las coordenadas $x, y, z, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, el tamaño de un elemento de estado arbitrario está definido como

$$d\omega = dx dy dz d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z}, \quad (\text{B.5})$$

no cambia en el tiempo, sí cada punto del elemento de estado se comporta según las leyes de la mecánica relativista. Por lo tanto, se puede identificar la probabilidad dW de que un punto del estado $x, y, z, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ se encuentre en el elemento de área $d\omega$. Aquí $d\omega$ se elige como una *macrodifereencial* (como la llamó Planck), esto es, tal que contenga muchos puntos aunque sea una cantidad pequeña. Si se eligiera como en la mecánica usual

$$d\sigma = dx dy dz d\dot{x} d\dot{y} d\dot{z} \quad (\text{B.6})$$

como elemento de área entonces bajo las leyes de la mecánica relativista para el movimiento de los puntos $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ que están en este elemento de área, este elemento de área cambiaría en el tiempo. Por lo tanto, la probabilidad dW de encontrar un punto en la región $d\sigma$ no se puede medir a través de la magnitud de $d\sigma$; más bien la probabilidad está dada por el elemento $d\omega$ que está vinculado con $d\sigma$ [3] (cf. siguiente sec. B.3).

El estado del gas, que no necesariamente debe ser el estado de equilibrio, cuando uno conoce el número de puntos de estado $x, y, z, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ en el elemento de área $d\omega$.

Sea este número representado por la expresión

$$dN = F(x, y, z, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) dx dy dz d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z} \equiv F d\omega, \quad (\text{B.7})$$

donde F es la función de distribución. De nuevo interpretamos dN como una cantidad grande, esto es una macrodifereencial. El número total de moléculas del gas entonces es

$$N = \int F d\omega. \quad (\text{B.8})$$

⁴N. T. La expresión *fuerza viva* era utilizada en el siglo 19, por ejemplo por Joule y Helmholtz, para referirse a la energía. El término energía fue introducido por Lord Kelvin y Rankine alrededor de 1850 ya que es válido en todas las áreas de la Física.

B.2. La ley para la distribución espacial y de velocidades en equilibrio termodinámico

Para calcular la probabilidad W del estado F hay que dividir el área de estados de seis dimensiones en elementos de área que tengan la misma probabilidad, es decir, con la misma área $d\omega$. Entonces como es habitual [4] se obtiene la probabilidad W del estado F de N moléculas:

$$W = \frac{N!}{\prod\{(F d\omega)\}!} = \frac{\{\int F d\omega\}!}{\prod\{(F d\omega)\}!}. \quad (\text{B.9})$$

Entonces, para la entropía S del estado F , utilizando la ecuación (B.1) y la fórmula de Stirling, se obtiene la expresión siguiente:

$$S = \text{const.} - k \int F \ln F d\omega. \quad (\text{B.10})$$

Para velocidades q de las moléculas del gas que son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz c se puede aproximar

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \dot{x}, & \boldsymbol{\eta} &= \dot{y}, & \boldsymbol{\zeta} &= \dot{z}, & d\omega &= d\sigma, \\ F(x, y, z, \mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) &= F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \equiv \varphi. \end{aligned}$$

Por lo tanto S se aproxima por la bien conocida expresión S_0 de la teoría usual de los gases:

$$S_0 = \text{const.} - k \int \varphi \ln \varphi d\sigma. \quad (\text{B.11})$$

En relación con lo anterior la expresión

$$H = k \int F \ln F d\omega,$$

representa la generalización relativista de la función H de Boltzmann, que como se sabe es

$$\int \varphi \ln \varphi d\sigma.$$

B.2. La ley para la distribución espacial y de velocidades en equilibrio termodinámico

Ahora consideremos el equilibrio termodinámico de un gas en reposo cuyo número de moléculas es

$$N = \int F d\omega, \quad (\text{B.12})$$

así como el volumen

$$V = \int dx dy dz \quad (\text{B.13})$$

y su energía total está dada por (cf. ec. (B.4))

$$E = \int L F d\omega = mc^2 \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} F d\omega. \quad (\text{B.14})$$

La función de distribución F en equilibrio no puede ser arbitraria ya que en equilibrio se tiene que cumplir con la condición de máxima entropía dada por la ecuación (B.11) junto con las restricciones de tener N moléculas en el gas con volumen V y energía E constante, esto es

$$(\delta S)_{E,V,N} = 0$$

De acuerdo con la ecuación (B.11), F también tiene que cumplir con

$$\int (\ln F + 1) \delta F d\omega = 0,$$

con las condiciones adicionales (B.12) y (B.14)

$$\int \delta F d\omega = 0, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \delta F d\omega = 0.$$

La solución

$$F = \alpha e^{-\beta \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}}, \quad (\text{B.15})$$

es la función de distribución del equilibrio buscada; más adelante (Sec. B.4) debemos determinar las constantes α y β a través de las cantidades N , V y E .

Debido a que F es independiente de x , y , z , la distribución espacial de las moléculas en estado de equilibrio es uniforme.

Cuando los valores de q son pequeños en comparación con c , para los cuales $d\omega$ se aproxima a $d\sigma$, entonces a través de un desarrollo en serie de F se obtiene el valor aproximado φ del estado estacionario:

$$\varphi = \alpha e^{-\beta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{c^2}\right)}$$

que también es

$$\varphi = \alpha' e^{-\beta' (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}, \quad (\text{B.16})$$

es decir, la ley usual de Maxwell para la distribución de las velocidades. La función F en la ecuación (B.15) representa la generalización relativista. En esta función cuando se fija $q = c$ se obtiene $F = 0$ y para $q > c$, F se vuelve imaginaria, mientras la expresión aproximada φ en (B.16) para $q = \infty$ tomaría el valor $\varphi = 0$, por lo tanto permitiría velocidades de las moléculas superiores a las de la luz.

B.2. La ley para la distribución espacial y de velocidades en equilibrio termodinámico

Mientras la expresión usual φ se puede descomponer en tres factores, cada uno dependiente de cada componente de la velocidad:

$$\varphi = \alpha' e^{-\beta' \dot{x}^2} e^{-\beta' \dot{y}^2} e^{-\beta' \dot{z}^2},$$

ésta es una propiedad que juega un papel importante en la teoría, en contraste la descomposición análoga de la función general

$$F = \alpha e^{-\beta \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}}}, \quad (\text{B.17})$$

no es posible. Se puede hacer una descomposición de factores muy complicada introduciendo otras variables de estado para la función transformada; se refiere a esto en otro contexto (en sec. B.6).

La forma más simple de F se obtiene a través de la ecuación (B.4), a saber

$$F = \alpha e^{-\frac{\beta}{mc^2} L}. \quad (\text{B.18})$$

A través de la introducción de los momentos (ímpetu) reducidos

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{m^2} = p^2, \quad (\text{B.19})$$

uno llega a una identidad entre p y la velocidad q de la masa puntual que es fácil de confirmar:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}. \quad (\text{B.20})$$

En consecuencia se obtiene otra forma sencilla para F :

$$F = \alpha e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}}. \quad (\text{B.21})$$

Escrito de este modo

$$F = \alpha e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}{c^2}}}, \quad (\text{B.22})$$

se puede dar cuenta que F tampoco se puede descomponer en tres funciones individuales de \mathfrak{x} , \mathfrak{y} , y \mathfrak{z} .

Ésta es la forma *más adecuada* con el elemento de área subyacente $d\omega$ es en realidad

$$dN = F d\omega = \alpha e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}{c^2}}} dx dy dz d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z}.$$

En el caso de la Mecánica usual las diferencias entre las distintas formas de F (B.15), (B.18), (B.21) desaparecen.

B.3. La función de distribución f que pertenece al elemento de área usual $d\sigma$

También es posible determinar el estado del gas a través de las variables de estado $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ en lugar de $x, y, z, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, es decir, aquellas que se refieren al elemento de área habitual

$$d\sigma = dx dy dz d\dot{x} d\dot{y} d\dot{z}, \quad (\text{B.23})$$

y por lo tanto se puede calcular posteriormente la función de distribución $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ de la teoría de los gases usual, dada por la ecuación

$$dN = \int f d\sigma. \quad (\text{B.24})$$

Usando el determinante Jacobiano de las variables originales con respecto a las nuevas variables, aplicando la teoría de transformación de integrales múltiples, la relación entre los elementos de área sí no toma en cuenta el signo, será

$$d\omega = \frac{\partial(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{\partial(x, y, z)} d\sigma.$$

Para calcular el determinante hay que usar las ecuaciones (B.3):

$$\mathfrak{x} = \frac{\dot{x}}{w}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\dot{y}}{w}, \quad \mathfrak{z} = \frac{\dot{z}}{w},$$

donde se utiliza la abreviatura

$$w = \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}; \quad (\text{B.25})$$

a través de las cuales se obtiene que,

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{c^2 w^3} (\dot{x}^2 + c^2 w^2), \quad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{c^2 w^3} \dot{x} \dot{y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \dot{z}} = \frac{1}{c^2 w^3} \dot{x} \dot{z}, \quad \text{etc.},$$

de donde el Jacobiano se convierte en,

$$\frac{\partial(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{c^6 w^9} \begin{vmatrix} \dot{x}^2 + c^2 w^2 & \dot{x} \dot{y} & \dot{x} \dot{z} \\ \dot{x} \dot{y} & \dot{y}^2 + c^2 w^2 & \dot{y} \dot{z} \\ \dot{x} \dot{z} & \dot{y} \dot{z} & \dot{z}^2 + c^2 w^2 \end{vmatrix}.$$

El cálculo del determinante simétrico del lado derecho, da como resultado $c^4 w^4 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + c^2 w^2)$, o con respecto a la definición de w es simplemente $c^6 w^4$; y entonces

$$\frac{\partial(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{w^5} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^5}.$$

B.4. Determinación de las constantes α y β que aparecen en la distribución F

Consecuentemente, la relación entre los correspondientes elementos de área está dado por,

$$d\omega = \frac{d\sigma}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^5}. \quad (\text{B.26})$$

La comparación de (B.7) con (B.24) lleva a la nueva función de distribución

$$f = \frac{F}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^5}. \quad (\text{B.27})$$

Especialmente en el estado de equilibrio es, de acuerdo con (B.15):

$$f = \frac{\alpha e^{-\beta \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}}}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^5}. \quad (\text{B.28})$$

Para valores de q más pequeños que c , la función f de (B.28) se convierte en la función usual de Maxwell φ de la ecuación (B.16), cuando se considera el crecimiento rápido de la función exponencial en comparación con el de una potencia.

B.4. Determinación de las constantes α y β que aparecen en la distribución F

Se pueden determinar las constantes α y β que aparecen en la función de distribución de Maxwell generalizada F del estado de equilibrio a través de los valores de las cantidades N , V y E del gas. Sea la forma de F dada por

$$F = \alpha e^{-\frac{\beta}{mc^2}L}, \quad (\text{B.29})$$

debido a que esta forma también aparece en la teoría usual, si se reemplaza L por la expresión $(m/2)q^2$ en lugar de la que corresponde a la teoría relativista (aunque con una interpretación distinta de las constantes).

Dado a que la forma de la función también es invariante bajo esta transición entonces lo mismo será válido para algunas de las siguientes fórmulas. La deducción de la ecuación (B.18) también puede hacerse más simple de forma invariante.

De las ecuaciones (B.12), (B.13) y (B.14) se sigue que, debido a que aquí F se refiere al estado de equilibrio y por lo tanto también independiente de x , y , z :

$$N = \int F d\mathbf{x}d\mathbf{y}d\mathbf{z}, \quad E = V \int L F d\mathbf{x}d\mathbf{y}d\mathbf{z}.$$

A través de ambas ecuaciones se puede calcular α y β .

La segunda de estas ecuaciones, de acuerdo con la ecuación (B.29),

$$L F = -mc^2 \frac{\partial F}{\partial \beta},$$

se puede escribir más fácil

$$E = -mc^2 V \frac{\partial}{\partial \beta} \int F d\mathfrak{x}d\mathfrak{y}d\mathfrak{z}.$$

Si se define una función $M(\beta)$ a través de la integral sobre el área total de las variables \mathfrak{x} , \mathfrak{y} , \mathfrak{z}

$$M(\beta) = \int e^{-\frac{\beta}{mc^2} L} d\mathfrak{x}d\mathfrak{y}d\mathfrak{z}, \quad (\text{B.30})$$

que de acuerdo con (B.29) es igual a

$$\int F d\mathfrak{x}d\mathfrak{y}d\mathfrak{z} = \alpha M(\beta).$$

Así pues, las dos ecuaciones para determinar α y β toman la siguiente forma:

$$N = V \alpha M(\beta), \quad E = -mc^2 V \alpha M'(\beta),$$

donde la prima en M significa la derivada con respecto a su argumento. Por consiguiente, primero se calcula β de

$$\frac{M'(\beta)}{M(\beta)} = -\frac{E}{Nmc^2} \quad (\text{B.31})$$

y a continuación se calcula α explícitamente de

$$\alpha = \frac{N}{VM(\beta)}. \quad (\text{B.32})$$

Las discusiones de este párrafo son todas invariantes en el sentido que ya se ha explicado anteriormente. En la teoría habitual la integral $M(\beta)$ se puede calcular de una manera elemental y se obtiene una función algebraica sencilla $(\pi/\beta)^{3/2}$; entonces (B.31) se vuelve lineal en β , con lo que se conoce α y β de forma explícita. En cambio en la teoría relativista la integral $M(\beta)$ representa una función trascendente de orden superior y (B.31) es una ecuación trascendental para β . Por tanto, no se puede obtener α y β de forma explícita.

Ahora, a través de (B.32), se puede representar F sólo por β

$$F = \frac{N}{VM(\beta)} e^{-\frac{\beta}{mc^2} L}. \quad (\text{B.33})$$

B.5. La entropía en equilibrio termodinámico: La ecuación de estado de un gas monoatómico ideal en reposo y la dependencia en la temperatura de su energía total y de la entropía (calores específicos y ecuaciones adiabáticas), así como de su energía libre

Uno puede ahora determinar fácilmente la entropía S del gas en reposo en el estado de equilibrio y utilizarla para deducir la termodinámica. A través de la ecuación

$$S = \text{const.} - k \int F \ln F d\omega, \quad (\text{B.34})$$

que es válida para un estado arbitrario F se sigue, para el estado de equilibrio, por (B.18) y considerando (B.8) y (B.14):

$$S = \text{const.} + k \left\{ \frac{\beta}{mc^2} E - N \ln \alpha \right\}. \quad (\text{B.35})$$

Mediante ecuación (B.32) también se puede expresar S sólo por β sin α ; si además se agrega a la expresión $-kN \ln N$ de la constante, se sigue:

$$S = \text{const.} + kN \left\{ \frac{\beta}{Nmc^2} E + \ln M(\beta) + \ln V \right\}. \quad (\text{B.36})$$

En la teoría usual de los gases en donde es posible calcular β directamente se obtiene, como es sabido, una expresión de la misma forma pero explícita:

$$S_0 = \text{const.} + kN \left\{ \frac{3}{2} \ln E + \ln V \right\}. \quad (\text{B.37})$$

Ahora, a través de la definición termodinámica de la entropía

$$dS = \frac{dE + PdV}{T}$$

se deducen las importantes relaciones

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_V = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_E = \frac{P}{T}. \quad (\text{B.38})$$

Hay que utilizar estas relaciones con la ecuación deducida para S (B.36), comenzando con la segunda fórmula.

Puesto que de (B.31), β es sólo dependiente de E y no de V , se concluye a través de (B.36):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_E = \frac{kN}{V},$$

por lo tanto (B.38):

$$PV = kNT. \quad (\text{B.39})$$

Debido a que la cantidad β se omitió en la diferenciación, y como ésta implica la diferencia entre las teorías, entonces se tiene que en la teoría generalizada de los gases las leyes de Boyle y de Gay-Lussac también son válidas. Además la constante del gas es independiente del carácter del gas, porque m no aparece en (B.39); así la ley de Avogrado también mantiene su validez. Así, la *ecuación de estado de un gas ideal monoatómico en reposo es válida también en la teoría de la relatividad*.

Por lo tanto, determina así la constante universal k de una manera conocida aplicando (B.39) a N_1 moléculas de un mol que ocupa un volumen V_1 (constante de Loschmidt⁵) y comparando

$$PV_1 = RT \quad (\text{B.40})$$

con la forma relacionada usual del volumen molar:

$$kN_1 = R. \quad (\text{B.41})$$

Ahora se debe usar la segunda fórmula (B.38). A través de (B.36) se obtiene, tomando en cuenta (B.32)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = kN \left\{ \frac{\beta}{Nmc^2} + \left(\frac{M'(\beta)}{M(\beta)} + \frac{E}{Nmc^2} \right) \frac{d\beta}{dE} \right\},$$

o bien simplificado,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{k\beta}{mc^2},$$

y debido a (B.38):

$$\beta = \frac{mc^2}{kT}. \quad (\text{B.42})$$

Ahora, la cantidad β exhibe un significado muy concreto, mide la temperatura absoluta del gas. Con (B.31) se obtiene que,

$$E = -Nmc^2 \frac{M' \left(\frac{mc^2}{kT} \right)}{M \left(\frac{mc^2}{kT} \right)}. \quad (\text{B.43})$$

En la teoría habitual de los gases la ecuación (B.42) es también válida; porque en (B.31) β se vuelve lineal, como se mencionó antes, también la dependencia de E se vuelve lineal en T , y se obtiene la siguiente expresión simple:

$$E_0 = \frac{3}{2}NkT. \quad (\text{B.44})$$

⁵N. T. También llamado número de Avogrado.

En la ecuación (B.43) está contenido este resultado curioso:

En la teoría de la Relatividad la energía de un gas monoatómico ideal en reposo ya no es proporcional a la temperatura, sino una función trascendente de la temperatura.

Ésta es una perfección del gas según la definición de Clausius [5] que requiere, salvo de otras dos propiedades (que se mencionan a continuación), de esta proporcionalidad, que en un sentido estricto, no es posible en la teoría de la relatividad.

Es fácil ahora formular las leyes que tienen que obedecer los calores molares medidos en calorías, a volumen constante C_v y a presión constante C_p , para un gas monoatómico.

Sea E_1 la energía de N_1 moléculas de un mol y a el equivalente mecánico del calor, entonces se obtiene que a través de la ecuación de definición

$$aC_v = \left(\frac{\partial E_1}{\partial T} \right)_V = \frac{dE_1}{dT}$$

y en seguida usando (B.43)

$$C_v = \frac{N_1 m^2 c^4}{ak} \frac{1}{T} \left\{ \frac{d^2 \ln M(\beta)}{d\beta^2} \right\}_{\beta = \frac{mc^2}{kT}},$$

o explícitamente:

$$C_v = \frac{N_1 m^2 c^4}{ak} \frac{1}{T} \left\{ \frac{M'' \left(\frac{mc^2}{kT} \right)}{M \left(\frac{mc^2}{kT} \right)} - \left[\frac{M' \left(\frac{mc^2}{kT} \right)}{M \left(\frac{mc^2}{kT} \right)} \right]^2 \right\}. \quad (\text{B.45})$$

Esta función de la temperatura aparece en lugar del valor constante C_{v0} de la teoría habitual de gases monoatómicos, la cual se puede obtener de una manera análoga por (B.44):

$$C_{v0} = \frac{1}{a} \frac{dE_{10}}{dT} = \frac{3}{2} \frac{N_1 k}{a} = \frac{3}{2} \frac{R}{a} = 3,0. \quad (\text{B.46})$$

Se sigue ahora de la primera ley de la Termodinámica, sólo bajo ambos requisitos para la idealidad de un gas, también válidos en la teoría de la relatividad, que obedece la ley de Boyle-Gay-Lussac-Avogadro y que su energía interna es sólo dependiente de la temperatura y no del volumen, que

$$C_p - C_v = \frac{R}{a}. \quad (\text{B.47})$$

Debido a (B.45) C_p así como C_p/C_v en la teoría de la relatividad son dependientes de la temperatura, mientras que, como es bien sabido, para un gas monoatómico se obtiene de (B.46) los valores constantes:

$$C_{p0} = \frac{5}{2} \frac{R}{a} = 5,0, \quad \frac{C_{p0}}{C_{v0}} = \frac{5}{3}. \quad (\text{B.48})$$

Debido a que C_v cambia con la temperatura, tampoco se aplican las fórmulas simples para los procesos adiabáticos.

Para deducir estas ecuaciones que son válidas aquí, es útil formular la entropía como función de la temperatura utilizando (B.35), (B.42) y (B.43),

$$S = const. + kN \left\{ \ln M \left(\frac{mc^2}{kT} \right) - \frac{mc^2}{kT} \frac{M' \left(\frac{mc^2}{kT} \right)}{M \left(\frac{mc^2}{kT} \right)} + \ln V \right\}. \quad (\text{B.49})$$

Esta fórmula es la generalización de la ecuación habitual que se deduce a través de (B.37) y (B.44):

$$S_0 = const. + kN \left\{ \frac{3}{2} \ln T + \ln V \right\}. \quad (\text{B.50})$$

Si se fija $S = const.$ entonces se obtiene la ecuación para el cambio de estado adiabático para un gas monoatómico ideal:

$$\ln M \left(\frac{mc^2}{kT} \right) - \frac{mc^2}{kT} \frac{M' \left(\frac{mc^2}{kT} \right)}{M \left(\frac{mc^2}{kT} \right)} + \ln V = const.,$$

o bien:

$$\frac{M \left(\frac{mc^2}{kT} \right)}{e^{\frac{mc^2}{kT} \frac{M' \left(\frac{mc^2}{kT} \right)}{M \left(\frac{mc^2}{kT} \right)}}} V = const. \quad (\text{B.51})$$

Ésta es la generalización que se sigue de la fórmula (B.50):

$$T^{3/2} V = const. \quad (\text{B.52})$$

A través de combinar (B.51) con la ecuación de estado usual (B.39) se obtienen otras dos relaciones para el cambio adiabático de estado,

$$\frac{TM \left(\frac{mc^2}{kT} \right)}{P \exp \left[\frac{mc^2}{kT} \frac{M' \left(\frac{mc^2}{kT} \right)}{M \left(\frac{mc^2}{kT} \right)} \right]} = const., \quad (\text{B.53})$$

$$\frac{M \left(\frac{Nmc^2}{PV} \right)}{\exp \left[\frac{Nmc^2}{PV} \frac{M' \left(\frac{Nmc^2}{PV} \right)}{M \left(\frac{Nmc^2}{PV} \right)} \right]} V = const., \quad (\text{B.54})$$

mientras (B.52) lleva a la fórmula usual correspondiente:

$$\frac{T^{5/2}}{P} = const., \quad (\text{B.55})$$

B.5. La entropía en equilibrio termodinámico

$$(PV)^{3/2}V = \text{const.}, \quad \text{ó} \quad PV^{5/3} = \text{const.} \quad (\text{B.56})$$

La energía libre A del gas ideal monoatómico en reposo, también tiene que tomar una forma diferente en la teoría de la relatividad, según su definición usual ⁶

$$A = E - TS. \quad (\text{B.57})$$

Debido a (B.35) y (B.42) la ecuación válida es,

$$S = \text{const.} + \frac{E}{T} - kN \ln \alpha,$$

entonces se obtiene

$$A = kNT \ln \alpha - \text{const.} T. \quad (\text{B.58})$$

Con esto el coeficiente α toma un sentido claro [6], porque $\ln \alpha$ es proporcional a la energía libre del gas, si no consideramos la función arbitraria $\text{const.} T$. Dado que el coeficiente β es inversamente proporcional a la temperatura, también se puede escribir:

$$A = Nmc^2 \frac{\ln \alpha}{\beta} - \text{const.} T; \quad (\text{B.59})$$

donde se reconoce que A depende directamente de α y β .

Utilizando (B.58), (B.32 y (B.42) se obtiene, cuando se usa $\text{const.} T$ para $kN \ln NT - \text{const.} T$:

$$A = \text{const.} T - kNT \left\{ \ln M \left(\frac{mc^2}{kT} \right) + \ln V \right\}, \quad (\text{B.60})$$

es decir, la generalización de la fórmula usual que se sigue de (B.44) y (B.50), en la cual fue substituída $\frac{3}{2}NkT - \text{const.} T$ por la correspondiente $\text{const.} T$ es:

$$A_0 = \text{const.} T - kNT \left\{ \frac{3}{2} \ln T + \ln V \right\}. \quad (\text{B.61})$$

Finalmente se puede introducir la temperatura en la ley de la distribución (B.33) a través de (B.42):

$$F = \frac{N e^{-\frac{L}{kT}}}{V M \left(\frac{mc^2}{kT} \right)}; \quad (\text{B.62})$$

esta fórmula corresponde a la ecuación habitual,

$$\varphi = \frac{N}{V} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mq^2}{2kT}}. \quad (\text{B.63})$$

⁶En la literatura alemana A se usaba para la energía libre de Helmholtz usualmente denotada por F .

B.6. Evaluación de la integral definida $M(\beta)$

Para pasar ahora a una discusión más precisa de las ecuaciones que se obtuvieron para las cantidades termodinámicas de gas monoatómico ideal en reposo en la teoría de la relatividad, se intentará reducir la función $M(\beta)$, que aparece en las fórmulas a través de funciones conocidas.

Debido a

$$M(\beta) = \int e^{-\frac{\beta}{mc^2}L} d\mathfrak{x}d\mathfrak{y}d\mathfrak{z} \quad (\text{B.64})$$

que $M(\beta)$ está dada por esta integral definida, hay que extender el intervalo de integración dado a todos los valores de las componentes del ímpetu reducido \mathfrak{x} , \mathfrak{y} , \mathfrak{z} , donde β es un parámetro. De acuerdo con (B.3) para la velocidad $q = 0$, también $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 0$, así que el ímpetu reducido es $p = 0$; en cambio, para la velocidad de la luz $q = c$, depende de la dirección de los ejes coordenados, por lo menos una de las componentes \mathfrak{x} , \mathfrak{y} , \mathfrak{z} toma el valor $\pm\infty$, por lo tanto el momento siempre es $p = \infty$ (de acuerdo con (B.20)); entonces hay que integrar $M(\beta)$ en todas las variables \mathfrak{x} , \mathfrak{y} , \mathfrak{z} desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Si se toma en cuenta que a partir de (B.4) y (B.20) se sigue

$$\frac{L}{mc^2} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}, \quad (\text{B.65})$$

se puede escribir claramente:

$$M(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}{c^2}}} d\mathfrak{x}d\mathfrak{y}d\mathfrak{z}. \quad (\text{B.66})$$

Aquí se interpretan \mathfrak{x} , \mathfrak{y} , \mathfrak{z} como coordenadas ortogonales de un punto P del estado en un espacio tridimensional usual y se introducen coordenadas esféricas donde el punto de origen 0 es un polo. El vector de radio OP que es dado obviamente a través de (B.19) por el valor absoluto del ímpetu reducido

$$p = \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}, \quad (\text{B.67})$$

mientras es útil escribir el elemento de espacio en una forma más compacta:

$$d\mathfrak{x}d\mathfrak{y}d\mathfrak{z} = d\tau = p^2 dp d\omega, \quad (\text{B.68})$$

donde $d\omega$ es un ángulo espacial infinitamente pequeño con O como vértice.

Entonces (B.66) se convierte en una doble integral,

$$M(\beta) = \int_0^\infty \int_{(\omega)} e^{-\beta\sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}} p^2 dp d\omega. \quad (\text{B.69})$$

A propósito, en esta fórmula es por lo demás implícita una transformación de la función de distribución F tal que depende sólo de una de las variables independientes del elemento de área (ver antes B.2).

B.6. Evaluación de la integral definida $M(\beta)$

Si se integra (B.69) con p fija, en toda la esfera unitaria y tomando en cuenta que

$$\int_{(\omega)} d\omega = 4\pi$$

entonces se obtiene una expresión más simple para la integral;

$$M(\beta) = 4\pi \int_0^\infty e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}} p^2 dp. \quad (\text{B.70})$$

Finalmente se introduce,

$$p = c \sinh \rho, \quad (\text{B.71})$$

donde el ángulo real hiperbólico ρ (más precisamente el sector) varía de $p = 0$ hasta $p = \infty$ también varía de 0 a ∞ . Entonces se obtiene que

$$M(\beta) = 4\pi c^3 \int_0^\infty e^{-\beta \cosh \rho} \sinh^2 \rho \cosh \rho d\rho. \quad (\text{B.72})$$

Antes de realizar el último paso del cálculo, se desea ahora dar brevemente la interpretación de las ya citadas transformaciones que se realizan en el enfoque de Minkowski en el espacio de cuatro dimensiones de las coordenadas x, y, z, l , donde $l = ct$. En este marco, a pesar del uso de las funciones hiperbólicas se usarán las expresiones Euclidianas.

Mientras que al inicio de esta sección $d\tau$ significaba el elemento de volumen del espacio tridimensional habitual, así como $d\omega$ el ángulo de la apertura del cono ⁷ en la dirección desde O hasta P y p significaba la distancia OP , ahora se pasa uno por (B.71) al espacio de cuatro dimensiones. Aquí se interpreta

$$\frac{d\tau}{c^3} = \sinh^2 \rho \cosh \rho d\rho d\omega = d\Omega \quad (\text{B.73})$$

como un elemento de ángulo sólido tridimensional donde O es el vértice que apunta en el espacio de cuatro dimensiones x, y, z, l , de O hasta P' que tiene coordenadas $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, L/mc$ las cuales son las componentes del rectangulares del “vector de movimiento” \mathfrak{V} . La magnitud de éste está compuesta por sus componentes de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \mathfrak{V} = \left(\frac{L}{mc}\right)^2 - \mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2 - \mathfrak{z}^2 = c^2, \\ |\mathfrak{V}| = c. \end{cases} \quad (\text{B.74})$$

En particular ρ es el ángulo desde el eje temporal, el eje polar, hasta \mathfrak{V} o también la dirección $d\Omega$. Debido a esta interpretación entonces (B.65) es

$$\frac{L}{mc} = c \cosh \rho \quad (\text{B.75})$$

⁷N. T. Ángulo sólido.

la componente temporal \mathfrak{V}_t del vector de movimiento y

$$p = c \sinh \rho \quad (\text{B.76})$$

es la componente complementaria \mathfrak{V}_{xyz} del mismo, es decir, es la proyección \mathfrak{V} en el espacio usual. Hay una relación física más sencilla para ρ que la relaciona con q según la ecuación (cf. (B.4)):

$$\frac{q}{c} = \tanh \rho; \quad (\text{B.77})$$

debido a las fórmulas $\tanh 0 = 0$, $\tanh \infty = 1$, se reconoce en reposo que tanto $q = 0$ como $\rho = 0$ corresponden al reposo, pero para la velocidad de la luz $q = c$ se transforma en el valor $\rho = \infty$ del “ángulo de la velocidad” [7].

Resumiendo, se puede decir que en la integral (B.30) usando (B.68) y (B.71) el vector de movimiento

$$\mathfrak{V} \equiv \left(\mathfrak{r}, \mathfrak{v}, \mathfrak{z}, \frac{L}{mc} \right),$$

lo hemos expresado a través de sus componentes polares tetra-dimensionales con respecto al eje temporal como eje polar ⁸. La integración triple que en (B.72) ha sido reducida a una forma más simple, se relaciona además con $d\Omega$, exceptuando el factor c^3 , es decir, a la superficie tridimensional de una esfera unitaria (o considerando c^3 , a la superficie de una esfera de radio $|\mathfrak{V}| = c$). A propósito aquí, debido a que nuestras fórmulas tienen forma hiperbólica, la superficie es la integral $\int d\Omega = \infty$, como es de inmediatamente claro de la interpretación original de $d\Omega$ como un elemento $d\tau$ del espacio Euclidiano dividido por c^3 .

Después de este análisis intermedio se debe ahora finalizar la reducción de la integral (B.72). Dadas a las fórmulas

$$\sinh^2 \rho = \cosh^2 \rho - 1, \quad 4 \cosh^3 \rho = \cosh 3\rho + 3 \cosh \rho$$

⁸ Las ecuaciones detalladas para introducir las componentes (hiperbólicas) polares cuatro-dimensionales o coordenadas [hipér-]esféricas se expresan:

$$\mathfrak{r} = c \sinh \rho \sin \lambda \cos \mu,$$

$$\mathfrak{v} = c \sinh \rho \sin \lambda \sin \mu,$$

$$\mathfrak{z} = c \sinh \rho \cos \lambda,$$

$$\frac{L}{mc} = c \cosh \rho,$$

y además

$$d\mathfrak{r}d\mathfrak{v}d\mathfrak{z} = c^3 d\Omega,$$

$$d\Omega = \sinh \rho^2 \cosh \rho \sin \lambda dp d\lambda d\mu$$

$$= \sinh \rho^2 \cosh \rho \sin \lambda dp d\omega.$$

Estas fórmulas permitirían llegar por un camino más corto de (B.30) a (B.72) si desde el principio se quiere utilizar el espacio cuatro-dimensional como una herramienta matemática.

se obtiene que,

$$\sinh^2 \rho \cosh \rho = \frac{1}{4} (\cosh 3\rho - \cosh \rho)$$

y por lo tanto,

$$M(\beta) = \pi c^3 \left\{ \int_0^\infty e^{-\beta \cosh \rho} \cosh 3\rho d\rho - \int_0^\infty e^{-\beta \cosh \rho} \cosh \rho d\rho \right\}.$$

Ahora para β real y positivo

$$\int_0^\infty e^{-\beta \cosh \rho} \cosh n\rho d\rho = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(i\beta),$$

donde $H_n^{(1)}$ es una clase de las funciones de Bessel cilíndricas, a saber, *las funciones cilíndricas de primera clase de orden n* de Hankel⁹. Mientras estas funciones son complejas en cada argumento real, las funciones de orden impar son reales para argumentos imaginarios positivos $i\beta$, aquellas de orden par son imaginarias puras, así que el lado derecho de la última ecuación es necesariamente siempre real (más precisamente, positivo). Para β infinito positivo, $H_n^{(1)}$ se anula.

La condición en cuestión para β se cumple por la convergencia de $M(\beta)$ que es físicamente necesaria. Por lo tanto se obtiene:

$$M(\beta) = \frac{\pi^2}{2} c^3 \left\{ H_3^{(1)}(i\beta) - H_1^{(1)}(i\beta) \right\}. \quad (\text{B.78})$$

En general se utilizan ahora las fórmulas recursivas [8]

$$H_{n+1}^{(1)} + H_{n-1}^{(1)} = \frac{2n}{x} H_n^{(1)},$$

donde x es el argumento común. Por lo tanto se obtiene la función buscada de una forma más simple:

$$M(\beta) = -2\pi^2 c^3 i \frac{H_2^{(1)}(i\beta)}{\beta}. \quad (\text{B.79})$$

⁹Cf. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln, Leipzig 1909.

Aquí se encuentra en la pág. 170 la fórmula derivada por Heine (aquí aparece una forma adaptada a nuestro caso)

$$H_n^{(2)}(-i\beta) = i^{n+1} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\beta \cosh \rho} \cosh n\rho d\rho, \quad (\text{A1})$$

donde β es real y positivo; además en la pág.95

$$H_n^{(2)}(x) = e^{i(n+1)\pi} H_n^{(1)}(xe^{i\pi})$$

o para $x = -i\beta$:

$$H_n^{(2)}(-i\beta) = (-1)^{(n+1)} H_n^{(1)}(i\beta). \quad (\text{A2})$$

A través de la combinación de las fórmulas (A1) y (A2) sigue la expresión que aparece en el texto.

Por el uso de la fórmula recursiva una vez más

$$H_2^{(1)} = \frac{2}{x} H_1^{(1)} - H_0^{(1)},$$

la ecuación (B.79) conduce a

$$M(\beta) = 2\pi^2 c^3 \frac{1}{\beta^2} \left\{ -2H_1^{(1)}(i\beta) + \beta i H_0^{(1)}(i\beta) \right\}. \quad (\text{B.80})$$

Las funciones que aparecen aquí de los dos órdenes más bajos $iH_0^{(1)}$ y $-H_1^{(1)}$ están tabuladas (lo que para $-iH_2^{(1)}$ hasta el momento no es el caso) ¹⁰; estas disminuyen monótonicamente de $+\infty$ a 0 para β creciente de 0 hasta $+\infty$. Además, $M(\beta)$ es siempre positiva y decrece de forma constante hasta 0.

Por lo tanto, se puede considerar $M(\beta)$ como una función conocida ya que por (B.78), (B.79) y (B.80) se reduce a las funciones de Bessel.

B.7. Las funciones termodinámicas relativistas de un gas monoatómico ideal en reposo como funciones cilíndricas de Hankel de la temperatura

Utilizando la forma más sencilla de $M(\beta)$ (B.79) se desea especificar de forma explícita las funciones termodinámicas calculadas en B.5, para un gas monoatómico ideal en reposo, desde el punto de vista de la teoría de la relatividad.

Debido a (B.31), la energía toma la forma

$$E = Nmc^2 \left\{ \frac{1}{\beta} - \frac{i H_2^{(1)'}(i\beta)}{H_2^{(1)}(i\beta)} \right\}, \quad (\text{B.81})$$

donde la prima que se encuentra en $H_2^{(1)}$ significa derivación por el argumento, es decir, por $i\beta$, o por su análogo (B.43),

$$E = Nmc^2 \left\{ \frac{kT}{mc^2} - \frac{i H_2^{(1)'}\left(i\frac{mc^2}{kT}\right)}{H_2^{(1)}\left(i\frac{mc^2}{kT}\right)} \right\}, \quad (\text{B.82})$$

La entropía (B.36) se convierte en

$$S = cte. + Nk \left\{ -\beta \frac{i H_2^{(1)'}(i\beta)}{H_2^{(1)}(i\beta)} + \ln \left(-i H_2^{(1)}(i\beta) \right) - \ln \beta + \ln V \right\}, \quad (\text{B.83})$$

¹⁰Jahnke-Emde p. 134-138. Las tablas para los valores de $\beta = 0,2$ hasta $\beta = 12,0$. Véase también las curvas asociadas a estos dos valores S.134

o de acuerdo con (B.49)

$$S = cte. + Nk \left\{ -\frac{mc^2}{kT} \frac{i H_2^{(1)'}\left(\frac{mc^2}{kT}\right)}{H_2^{(1)}\left(\frac{mc^2}{kT}\right)} + \ln \left(-i H_2^{(1)}\left(\frac{mc^2}{kT}\right) \right) + \ln T + \ln V \right\} \quad (\text{B.84})$$

Conforme con (B.60) la energía libre sería:

$$A = const. \frac{1}{\beta} - \frac{Nmc^2}{\beta} \left\{ \ln \left(-i H_2^{(1)}(i\beta) \right) - \ln \beta + \ln V \right\} \quad (\text{B.85})$$

o bien:

$$A = const. T - kNT \left\{ \ln \left(-i H_2^{(1)}\left(\frac{mc^2}{kT}\right) \right) + \ln T + \ln V \right\}. \quad (\text{B.86})$$

A propósito se pueden reescribir estas ecuaciones así como (B.80), sólo con $H_1^{(1)}$ y $H_0^{(1)}$, si se utiliza, además de la fórmula de recursión mencionada antes, otra más ¹¹

$$\frac{dH_n^{(1)}(x)}{dx} = -\frac{n}{x} H_n^{(1)}(x) + H_{n-1}^{(1)}(x)$$

Sin embargo, aquí sólo se desea dar la expresión para la energía que permita usar directamente las tablas de las funciones involucradas,

$$E = Nmc^2 \frac{(6 + \beta^2) H_1^{(1)}(i\beta) - 3\beta i H_0^{(1)}(i\beta)}{\beta (2H_1^{(1)}(i\beta) - \beta i H_0^{(1)}(i\beta))}. \quad (\text{B.87})$$

B.8. Discusión numérica: los valores de β y la relación entre la teoría relativista de los gases y la teoría usual

Así como en la mecánica relativista se convierte en la mecánica newtoniana para pequeñas velocidades, también la teoría relativista de los gases tiene que convertirse necesariamente en la teoría usual de los gases para velocidades moleculares promedio pequeñas, es decir para bajas temperaturas. Para tener un panorama más preciso es necesario hacer una discusión numérica de las fórmulas que fueron deducidas en las secciones anteriores. En este marco se puede limitar al análisis de E , ya que C_v , S , A etc., dependen directamente de su comportamiento.

En primer lugar se quiere determinar la magnitud de los valores numéricos de

$$\beta = \frac{mc^2}{kT},$$

¹¹Jahnke-Emde p. 165.

ya que β es el argumento principal en todas las fórmulas. Se tiene [9]

$$c = 3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}, \quad k = 1,346 \times 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grad}},$$

entonces

$$\beta = \frac{9}{1,346} \times 10^{36} \frac{m}{T}.$$

Aunque el parámetro β que depende de la temperatura es un número puro (también por lo que respecta a la temperatura), no es por ello una función universal de la temperatura sino es proporcional al peso molecular del gas. Debido a que β será en general muy grande, escogemos al helio como ejemplo, ya que entre los gases monoatómicos tiene el menor peso molecular, a saber, He = 3,99 (comparando con O = 16,000). Para el vapor de mercurio monoatómico cuyo peso atómico es Hg = 200,0, entonces β sería 50 veces más grande que para el Helio a la misma temperatura.

La masa de la molécula de helio es

$$m = \frac{3,99}{6,175 \times 10^{22}} g = 6,46 \times 10^{-24} g,$$

donde $6,175 \times 10^{23}$ es el valor de la constante de Loschmidt N_1 [10] que fue introducida antes (cf. (B.41)). Por lo tanto para el He se tiene que

$$\beta = \frac{4,32 \times 10^{13}}{T},$$

y se obtiene la siguiente tabla general:

T (°abs)	β
0	∞
3	$1,44 \times 10^{13}$
300	$1,44 \times 10^{11}$
6000	$0,72 \times 10^{10}$
1 Billon	43,2
43,2 Billones	1
1 Trillon	$4,32 \times 10^{-15}$
∞	0

Se reconoce que para las temperaturas accesibles en experimentos el parámetro β tiene un valor muy grande para *todos* los gases monoatómicos: Incluso si se tuviera en consideración las temperaturas calculadas de algunas estrellas fijas de más de 20000, en este intervalo β no bajaría por debajo del valor de mil de millones, para ningún tipo de materia.

En este intervalo de temperaturas y mucho más allá, se podrían ciertamente utilizar entonces las representaciones asintóticas de las funciones cilíndricas. Para β grande [11] es válido que

$$-iH_2^{(1)}(i\beta) = \frac{e^{-\beta}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi\beta}} S_2(2\beta),$$

donde

$$\begin{aligned} S_2(2\beta) &= 1 + \frac{4 \cdot 2^2 - 1}{1!8\beta} + \frac{(4 \cdot 2^2 - 1)(4 \cdot 2^2 - 9)}{2!(8\beta)^2} + \dots \\ &= 1 + \frac{15}{8\beta} + \frac{105}{128\beta^2} - + \dots \end{aligned}$$

es una serie semi convergente ¹². Entonces (B.79) se convierte en (cf. al final de sec, B.4)

$$M(\beta) = 2^{3/2} \pi^{3/2} \frac{e^{-\beta}}{\beta^{3/2}} S_2(2\beta). \quad (\text{B.88})$$

Para la energía, de acuerdo con la ecuación (B.31)

$$E = -Nmc^2 \frac{d \ln M(\beta)}{d\beta};$$

que por (B.88) es también

$$\ln M(\beta) = \text{const.} - \beta - \frac{3}{2} \ln \beta + \ln S_2(2\beta);$$

por lo tanto, se obtiene la siguiente expresión asintótica de la energía:

$$E = Nmc^2 \left\{ 1 + \frac{3}{2\beta} - \frac{1}{S_2(2\beta)} \frac{dS_2(2\beta)}{d\beta} \right\}. \quad (\text{B.89})$$

Si se considera primero β muy grande entonces se puede formar aproximadamente

$$S_2(2\beta) = 1;$$

Se obtiene entonces que a través de (B.89):

$$E = Nmc^2 \left(1 + \frac{3}{2\beta} \right). \quad (\text{B.90})$$

o bien

$$E = Nmc^2 + \frac{3}{2} NkT. \quad (\text{B.91})$$

La comparación con la expresión E_0 de (B.44) lleva a:

$$E = Nmc^2 + E_0. \quad (\text{B.92})$$

En efecto a través de las temperaturas accesibles en nuestros experimentos E se vuelve *aproximadamente una función lineal de la temperatura*, a saber, la expresión usual E_0 hasta un término

¹²N. T. Se refiere a que la serie converge sólo para ciertos valores del parámetro β .

aditivo constante Nmc^2 . Esta última que, a diferencia de E_0 , depende de la naturaleza del gas, hay que considerarla como la energía interna que también posee el gas¹³ a $T = 0$.

En efecto, si se desea ahora obtener la desviación del comportamiento lineal de la función de la energía o bien, si se quiere calcular la energía para β no tan grandes, se debe usar la ecuación (B.89) completa. Como

$$\frac{dS_2(2\beta)}{d\beta} = -\frac{15}{8\beta^2} - \frac{105}{64\beta^3} + \dots$$

se obtiene la siguiente representación *asintótica*, explícita y más precisa de la energía (para β grande):

$$E = Nmc^2 \left\{ 1 + \frac{3}{2\beta} + \frac{15}{8\beta^2} - \frac{15}{8\beta^3} + \dots \right\} \quad (\text{B.93})$$

o bien

$$E = Nmc^2 + \frac{3}{2}NkT + \frac{15}{8} \frac{Nk^2}{mc^2} T^2 - \frac{15}{8} \frac{Nk^3}{m^2c^4} T^3 + \dots \quad (\text{B.94})$$

De (B.93) se reconoce que la relación entre la primera corrección de E y el valor principal E_0 está dado por

$$\frac{15}{8\beta^2} : \frac{3}{2\beta} = \frac{5}{4\beta}.$$

Para Helio se observa que

$$T \cdot 2,9 \times 10^{-12} \%;$$

por lo tanto para este gas el valor verdadero $E - Nmc^2$ por ejemplo, a temperatura ambiente es más grande por aprox. $10^{-9} \%$, a 6000 lo es por aprox. $2 \times 10^{-8} \%$ y a 1/10 de billón de grados, por aprox. $0,3 \%$ del valor aproximado E_0 . Para vapor de mercurio estas correcciones son todavía 50 veces más pequeñas.

La ecuación (B.92) y entonces la suposición de Clausius (véase sec. B.5) es por lo tanto completamente válida, por razones prácticas, para *cualquier* gas monoatómico *hasta alcanzar una temperatura de 1/10 de billón de grados*, de modo que, en la práctica, también para los calores específicos, los procesos adiabáticos etc. se aplican las fórmulas usuales.

Por otra parte, si para el helio se sobrepasa la temperatura de 10 billones de grados, para el vapor de mercurio 500 billones de grados, entonces la ley lineal (B.92) pierde completamente su validez en estas regiones extremas, ya que β se vuelve (comparar con la tabla anterior). En este caso la dependencia de E en la temperatura está dada por las funciones cilíndricas de acuerdo con (B.81)

¹³Véase M. Planck, Ann. d. Phys. 26. p. 1-34. 1908. Basado en la expresión (B.4) del texto para L , que nos lleva para valores pequeños de q

$$L = mc^2 + \frac{m}{2}q^2.$$

o (B.87). Además, las representaciones asintóticas (B.93) no son válidas en este caso; éstas tienen un sentido específico sobre todo en la región de temperatura intermedia, por ejemplo, para helio de $1/10$ de billón hasta aproximadamente 1 billón de grados, debido a que los términos de corrección son significativos aunque β todavía es grande.

Si se consideran varios gases monoatómicos con la misma temperatura, se sigue que sus energías E son diferentes debido a la desigualdad de sus pesos moleculares m y a que sus parámetros β son distintos. *La ley de la distribución uniforme de energía por tanto nunca es válida en un sentido estricto en la teoría relativista de los gases ideales monoatómicos*¹⁴. Si se restringe a temperaturas menores a un billón de grados, se puede reemplazar (B.81) por (B.94), entonces se toma en cuenta que en el término principal E_0 el factor de masa m se cancela, mientras esto no es el caso con los demás términos. Entonces, para este intervalo de temperaturas se puede decir con mayor precisión que para el término principal la ley de distribución uniforme de energía es válida, mientras que para la energía interna y los términos de corrección no.

Al mismo tiempo, los términos de corrección de primer orden se comportan inversamente proporcionales a la primera potencia, aquellos de segundo orden inversamente proporcionales a la segunda potencia del peso molecular etc. (véanse los ejemplos numéricos para He y Hg). Ahora, si se restringen aún más, a saber, temperaturas menores a $1/10$ de billón de grados, entonces la distribución uniforme de energía es prácticamente válida, debido a que sólo se considera E_0 , evitando la energía interna constante.

Si se comparan finalmente gases de distintos pesos moleculares con sistemas de resonadores con distintos números de vibración, como introdujo Planck en su teoría de la radiación, entonces se reconoce que, estrictamente, estas dos estructuras no exhiben una distribución uniforme de energía para ninguna temperatura. Los resonadores muestran aproximadamente este comportamiento (la distribución uniforme) entre ellos, para temperaturas altas y números de vibración no demasiado grandes [12], los gases muestran una distribución uniforme entre ellos para temperaturas bajas (en el sentido explicado antes), los resonadores y los gases ambos muestran una distribución uniforme para temperaturas intermedias (es decir, para temperaturas altas en nuestros experimentos usuales).

Berlín, Enero 30, 1911.

(Recibido, 5 Febrero 1911).

Bibliografía

- [1] M. Planck, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. **8** p. 136-141 (1906).
- [2] M. Planck, l.c. p. 140 u. 141. Annalen der Physik.. IV. Folge. 34.
- [3] Cf. M. Planck, Acht Vorlesungen über theoretische Physik p. 55–57, Leipzig 1910.

¹⁴N. T. En el lenguaje moderno se refiere a la equipartición de la energía.

- [4] Cf. M. Planck, Acht Vorlesungen p. 60–62. Para ver más detalles sobre cálculos e ideas sobre la teoría de los gases, que no cambian cuando se estudia la teoría relativista, remítase a la cuarta lección de este libro.
- [5] Cf. G. H. Bryan, Enzyklop. d. Math. Wiss. V, 1. p. 119.
- [6] Cf. P. Debye, Am. d. Phya. **33**. p. 453, u. 454. (1910).
- [7] Cf. A. Sommerfeld, Physik. Zeitschr. **10**. p. 826-829. (1909).
- [8] Jahnke-Emde p. 165.
- [9] M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmwtrahlung, Leipzig 1906. p. 162; oder Acht Vorlesungen p. 93 und 94.
- [10] Vea la nota en la página 877.
- [11] Jahnke-Emde p. 100 u. 98.
- [12] M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, p. 159-160.



Dinámica de un gas en movimiento en la teoría de la relatividad

Ferencz Jüttner¹

Versión al español y comentarios:

Guillermo Chacón Acosta

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas, Universidad Autónoma Metropolitana-Cuajimalpa, México D. F. 01120, México

Leopoldo García-Colín Scherer

Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, México D. F. 09340, México, El Colegio Nacional, Luis González Obregón 23, Centro Histórico, México D. F. 06020, México

Ertan Göklü

ZARM - Center of Applied Space Technology and Microgravity, University Bremen, Am Fallturm 28359 Bremen, Alemania,

Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, México D. F. 09340, México

¹Título original: *Die dynamik eines bewegten Gases in der Relativtheorie*. Ann. Physik und Chemie **35**, 145 (1911).

Desde el punto de vista de la teoría de relatividad de H. Lorentz y A. Einstein no está permitido hacer una descomposición aditiva de la energía de un sistema físico en movimiento, es decir, descomponerlo en un término que dependa únicamente de la velocidad, la energía del movimiento progresivo y un segundo término sólo dependiente del estado, es decir, del volumen, la temperatura, de un término de naturaleza química y de la energía interna. En consecuencia, se ha vuelto necesario reformular la dinámica general de los procesos reversibles como las justificó H. v. Helmholtz [1] usando el *principio de mínima acción*, donde hasta ahora se hizo la suposición la descomposición de la energía. Esta muy importante y complicada tarea la ha realizado M. Planck [2] al sustituir la hipótesis sobre la energía por el principio de la relatividad en sus investigaciones sobre el principio de mínima acción. Mediante la aplicación de los resultados obtenidos por él, ahora es posible, dado que se conocen las variables de estado de un sistema en reposo, que cumplen con el principio de relatividad, se pueden entonces determinar directamente las mismas variables para un sistema en movimiento. Así, Planck ha deducido las cantidades dinámicas de la radiación de un resonador ² a través de las cantidades en reposo, dado que éstas cumplen con el principio de la relatividad, por lo que ésta es una deducción hecha de una manera mucho más fácil de la que fue realizada originalmente por K. V. Mosengeil.

Dado a que el autor ha obtenido recientemente las funciones termodinámicas de un gas monoatómico ideal en reposo basado en la mecánica relativista, debe aquí formular la dinámica de un gas en movimiento utilizando la dinámica general de la relatividad, como fue desarrollada por Planck.

C.1. Resumen de las fórmulas básicas para el potencial cinético

A partir del ya considerado gas monoatómico ideal, compuesto por N moléculas con masa m y que se encuentra en un estado estacionario, determinado por el volumen V , la temperatura T y los componentes de la velocidad $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ a lo largo de los tres ejes de x, y, z , de un sistema de coordenadas rectangulares lineales en reposo. La magnitud q de la velocidad está dada entonces por

$$q^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

De acuerdo con las consideraciones anteriores el potencial cinético H de los gases es una función de q, V y T :

$$H = H(q, V, T).$$

Se sigue entonces gracias a H. v. Helmholtz, que la magnitud G de la cantidad de movimiento del gas, a través de cambios reversibles de estado por el principio de mínima acción ³:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = G, \tag{C.1}$$

²N. T. En un lenguaje más moderno hablaríamos de un cuerpo negro, en alemán *Schwarzkörperstrahlung*.

³El signo de H se escogió como lo hizo Planck, al contrario de Helmholtz.

para sus componentes $\mathfrak{G}_x, \mathfrak{G}_y, \mathfrak{G}_z$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = \mathfrak{G}_x = G \cdot \frac{\dot{x}}{q}, \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} = \mathfrak{G}_y = G \cdot \frac{\dot{y}}{q}, \\ \frac{\partial H}{\partial \dot{z}} = \mathfrak{G}_z = G \cdot \frac{\dot{z}}{q}, \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

además para la presión p y la entropía S del gas

$$\frac{\partial H}{\partial V} = p, \quad \frac{\partial H}{\partial T} = S, \quad (\text{C.3})$$

finalmente, para la energía total E :

$$E = q \frac{\partial H}{\partial q} + T \frac{\partial H}{\partial T} - H = qG + TS - H. \quad (\text{C.4})$$

Además, tomando aquí en consideración la siguiente expresión para la función de Gibbs R , función de calor a presión constante, está dada por la relación,

$$R = E + pV. \quad (\text{C.5})$$

Debido a (C.3) y (C.4) se obtiene su representación completamente simétrica

$$R = q \frac{\partial H}{\partial q} + V \frac{\partial H}{\partial V} + T \frac{\partial H}{\partial T} - H = qG + Vp + TS - H. \quad (\text{C.6})$$

Entonces Helmholtz procedió de tal manera que dividió el potencial cinético H en dos partes del modo siguiente ⁴

$$H = \frac{1}{2}Mq^2 - A,$$

donde se tiene que, como para una masa puntual, M es aquí la del gas y A su energía libre, que se supone independiente de q . Por la forma en que la función H depende de q se sigue de aquí que de (C.1) hasta (C.6) son las expresiones de la mecánica y termodinámica usuales.

Por otro lado, si se cumple toda la física del principio de la relatividad, entonces este requisito comprende otra forma general de la dependencia del potencial cinético H en q . Esta forma fue determinada por Planck. Para indicar como es, se deben primero explicar las siguientes expresiones. Se entenderá H_0 como la función de dos variables V y T , la cual se transforma en la función H de tres variables q, V y T ; cuando se fija $q = 0$, entonces H es el potencial cinético del gas en reposo. Además H'_0 representa a la función de tres variables q, V y T , la cual se vuelve una función de ambas variables V y T , cuando se sustituye V por V' y T por T' , donde

$$V' = \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}. \quad (\text{C.7})$$

⁴H. v. Helmholtz, Crelles Journ. **100**. p. 155. Las ecuaciones (6) y (6a); él fija (excepto por el signo)

$$H = L - A,$$

donde L es la fuerza viva del movimiento perceptible de las masas gravitacionales.

C.1. Resumen de las fórmulas básicas para el potencial cinético

Aquí c denota la velocidad de la luz. Consecuentemente se definirán más tarde $p_0, S_0, E_0, \dots, p'_0, S'_0, E'_0, \dots$. Más aún, debido al principio de la relatividad, el potencial cinético debe tener la siguiente forma:

$$H = \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} H'_0. \quad (\text{C.8})$$

Esta expresión debe aparecer en lugar de aquella de Helmholtz, la cual, si se utilizaran las expresiones anteriores tendría esta forma:

$$H = \frac{1}{2} M q^2 + H_0. \quad (\text{C.9})$$

Siguiendo la ecuación (C.8) en la teoría de la relatividad el potencial cinético H del sistema en movimiento es conocido, si se conoce el potencial cinético del sistema en reposo. De este modo se pueden deducir, sin problemas, las demás variables de estado de un sistema en movimiento a través de (C.1) hasta (C.6). En la teoría antigua la ecuación correspondiente fue realizada en (C.9), a la cual se vuelve aproximadamente la ecuación (C.8) para velocidades q pequeñas respecto c bajo ciertas restricciones. De acuerdo con (C.8) el principio de relatividad requiere que H sea una función homogénea de grado uno de tres variables

$$T, \quad V, \quad \text{y} \quad \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}.$$

Según el teorema de Euler es en consecuencia la ecuación (C.8) la integral general de la siguiente ecuación diferencial lineal parcial de primer orden [4]

$$T \frac{\partial H}{\partial T} + V \frac{\partial H}{\partial V} - \frac{c^2 - q^2}{q} \frac{\partial H}{\partial q} - H = 0. \quad (\text{C.10})$$

Esta misma, también puede reescribirse usando (C.1) y (C.3) de esta manera:

$$TS + Vp - H = \frac{c^2 - q^2}{q} G, \quad (\text{C.11})$$

o por (C.6), en la forma más simple [5]:

$$G = \frac{q}{c^2} R. \quad (\text{C.12})$$

Esta ecuación (C.12), que es equivalente tanto a (C.8) como a (C.10), hace, en la teoría de la relatividad, a la cantidad de movimiento dependiente de su energía, y entonces es una función de q , V y T , y conserva en general la existencia de una masa constante. Si se introduce una masa transversal M_t , una masa longitudinal M_l (isotérmica-isocórica) y simplemente la masa en reposo M a través las definiciones usuales:

$$M_t = \frac{G}{q}, \quad M_l = \frac{\partial G}{\partial q}, \quad M = \left(\frac{G}{q} \right)_{q=0} = (M_t)_0 = (M_l)_0, \quad (\text{C.13})$$

entonces se obtiene, a través de (C.12), las cantidades:

$$M_t = \frac{R}{c^2}, \quad M_l = M_t + \frac{q}{c^2} \frac{\partial R}{\partial q}, \quad M = \frac{R_0}{c^2}. \quad (\text{C.14})$$

C.2. Dinámica general de un gas ideal monoatómico en movimiento

Después del panorama dado en la sección anterior sobre las fórmulas fundamentales, se debe ahora deducir a través de las mismas, la dinámica de un gas ideal monoatómico en movimiento a partir de la termodinámica en reposo, como se sigue de la teoría cinética relativista de los gases.

Dado que, según (C.3) el potencial cinético H_0 del gas en reposo es igual al valor negativo de su energía libre A_0 :

$$H_0 = -A_0, \quad (C.15)$$

entonces se puede encontrar de inmediato, en la investigación mencionada por el autor [6], el valor de H_0 en:

$$H_0 = kNT \left\{ \ln \left(-iH_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2}{kT} \right) + \ln T + \ln V \right) \right\} + CT. \quad (C.16)$$

Aquí, k es la constante de la definición general de la entropía [4]:

$$S = k \ln W + const;$$

$H_2^{(1)}$ son las funciones cilíndricas de Hankel de primera clase y de segundo orden, i es la unidad imaginaria y C es una constante arbitraria.

Como es bien sabido, a través (C.16) se sigue que, de acuerdo con (C.3), (C.4) y (C.5), las demás funciones termodinámicas de un gas en reposo⁵ son,

$$p_0 = \frac{kNT}{V}, \quad (C.17)$$

$$S_0 = kN \left\{ -\frac{mc^2}{kT} \frac{iH_2^{(1)'} \left(i \frac{mc^2}{kT} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2}{kT} \right)} + \ln \left(-iH_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2}{kT} \right) \right) + \ln T + \ln V \right\} + kN + C, \quad (C.18)$$

$$E_0 = kNT - Nmc^2 \frac{iH_2^{(1)'} \left(i \frac{mc^2}{kT} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2}{kT} \right)}, \quad (C.19)$$

$$R_0 = 2kNT - Nmc^2 \frac{iH_2^{(1)'} \left(i \frac{mc^2}{kT} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2}{kT} \right)}. \quad (C.20)$$

A través de (C.8) y (C.7) se obtiene inmediatamente por (C.16), el potencial cinético del gas en movimiento con velocidad q :

$$H = kNT \left\{ \ln \left[-iH_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right) \right] + \ln T + \ln V - \ln \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right) \right\} + CT. \quad (C.21)$$

⁵F. Jüttner l. c. p. 866, ecuación (26) y p. 876 ecuación (53²) y (52²). Además, las expresiones S_0, \dots, E_0 , no significan lo mismo en el trabajo anterior, que [aquí] arriba, sino los valores para temperaturas bajas.

De aquí se obtienen por medio de (C.3), (C.1), (C.4), (C.5) y (C.13), las variables de estado generales:

$$p = \frac{kNT}{V}, \quad (C.22)$$

$$S = kN \left\{ -\frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} iH_2^{(1)'} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)}{kT H_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)} + \ln \left[-iH_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right) \right] + \ln T + \ln V - \ln \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right) \right\} + kN + C, \quad (C.23)$$

$$G = \frac{2q}{c^2 \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right)} kNT - \frac{Nm q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \frac{iH_2^{(1)'} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)}, \quad (C.24)$$

$$E = \frac{1 + \frac{q^2}{c^2}}{1 - \frac{q^2}{c^2}} kNT - \frac{Nmc^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \frac{iH_2^{(1)'} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)}, \quad (C.25)$$

$$R = \frac{2kNT}{1 - \frac{q^2}{c^2}} - \frac{Nmc^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \frac{iH_2^{(1)'} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)}, \quad (C.26)$$

$$M_t = \frac{2kNT}{c^2 \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right)} - \frac{Nm}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \frac{iH_2^{(1)'} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)}, \quad (C.27)$$

$$M_l = \frac{1 + \frac{q^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right)^2} 2kNT - \frac{Nm}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} \right)^3} \frac{iH_2^{(1)'} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)} - \frac{Nm^2 q^2}{1 - \frac{q^2}{c^2}} \frac{1}{kT} \left\{ \frac{iH_2^{(1)''} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)} - \left[\frac{iH_2^{(1)'} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \right)} \right]^2 \right\}, \quad (C.28)$$

$$M = \frac{2kNT}{c^2} - Nm \frac{iH_2^{(1)'} \left(i \frac{mc^2}{kT} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2}{kT} \right)}. \quad (C.29)$$

Como se reconoce en (C.22) el gas en movimiento tiene la misma ecuación de estado que en reposo. El principal interés que ofrecen las fórmulas deducidas es que son buenos ejemplos para las discusiones generales de la introducción del primer párrafo. Entonces la expresión de la energía (C.25), en la cual las variables independientes q y T aparecen en una manera complicada (aquí V no aparece), muestra que en una descomposición de la energía⁶, sólo dependiente de la velocidad y en una energía interna que sólo depende de la temperatura, en la teoría de la relatividad no es de hecho posible. Además, las cantidades mecánicas, el momento (ímpetu) G , así como las masas M_t y M_l , están determinadas por (C.24), (C.27) y (C.28) no sólo por la velocidad sino también por la temperatura. La masa en reposo M por (C.29) no es una constante sino una función de la temperatura. También la correlación estrecha entre la función de calor R en (C.26) y las variables mecánicas de estado G , M_t , M_l y M es inmediatamente evidente y corresponde exactamente a las fórmulas (C.12) y (C.14) deducidas anteriormente.

La dinámica de un gas monoatómico ideal constituye así una contraparte interesante de la radiación de un cuerpo negro. La posibilidad de tratar con éxito aquel [sistema] sencillo de materia y de este sistema energético a través del principio de mínima acción, está basado en que en ambos casos se tiene una visión más profunda del mecanismo interno del sistema.

Se quiere señalar brevemente que la fórmulas anteriores para el valor de H , también se pueden obtener por especialización de las ecuaciones generales de Planck [8].

A través de la notación que se indicó antes, particularmente tomando en cuenta la ecuación (C.7), se tiene en general que

$$p = p'_0, \quad (C.30)$$

y de esto, por ecuación (C.17), se sigue inmediatamente (C.22).

A través de la relación

$$S = S'_0, \quad (C.31)$$

directamente de (C.18) se sigue (C.23).

De la ecuación

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} E'_0 + \frac{q^2}{c^2 \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)} V p'_0, \quad (C.32)$$

se obtiene la fórmula (C.25), debido a (C.19), (C.30) y (C.17).

La ecuación

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} R'_0, \quad (C.33)$$

conduce, por (C.20), al valor (C.26). Sería más conveniente si se siguiera una deducción conjunta de G , M_t , M_l y M a través del valor recién obtenido de R (Cf. arriba pág. 153).

⁶N. T. *Fuerza Viva*. Ver Nota 4 del capítulo anterior.

C.3. Reducción de la dinámica del gas para bajas temperaturas y velocidades pequeñas

Para temperaturas bajas, es decir, para velocidades promedio de las moléculas del gas pequeñas en comparación con la velocidad de la luz, es decir, hasta 1/10 de billón de grados [9], en lo que sigue, el argumento de las funciones de Hankel que aparece en la primera parte de la sección 2

$$i \frac{mc^2}{kT},$$

siempre tendrá un valor muy grande. El argumento más general que aparece en la segunda parte de la sección 2, a saber es

$$i \frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT},$$

también toma valores muy grandes, no sólo para temperaturas bajas, sino también, simultáneamente, para velocidades q pequeñas comparadas con c .

Para $i\beta$ grandes se puede expresar aproximadamente [10]

$$-iH_2^{(1)}(i\beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\beta} \beta^{-1/2}, \quad (\text{C.34})$$

así que ⁷

$$\ln \left[-iH_2^{(1)}(i\beta) \right] = -\beta - \frac{1}{2} \ln \beta + \ln \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

De la misma manera, las fórmulas de la dinámica del gas se reducen⁸ a expresiones sencillas solamente de funciones elementales si se refieren a un gas en reposo para temperaturas bajas, y análogamente, si se refieren a un gas en movimiento, para temperaturas bajas y al mismo tiempo velocidades pequeñas. Estas cantidades aproximadas se señalarán con una barra, por ejemplo \bar{H}_0 , \bar{H} .

Si en la ecuación (C.16), se substituye, usando (C.34), la constante arbitraria C de la relación

$$C + \frac{kN}{2} \ln \frac{2k}{\pi mc^2} = D,$$

por la nueva constante D , se llaga a la ecuación aproximada:

$$\bar{H}_0 = kNT \left(\frac{3}{2} \ln T + \ln V \right) - Nmc^2 + DT. \quad (\text{C.35})$$

⁷Se quiere llamar la atención que en varias fórmulas de arriba aparece el cociente diferencial *logarítmico* de primer orden (ec. (C.18) hasta (C.20), (C.23) hasta (C.27), (C.29)) y de segundo orden ec. (C.28), de la función de Hankel.

⁸N. T. Literalmete Jüttner usa la palabre *degeneración*, aquí utilizaremos reducción, para evitar confusiones con los gases cuánticos en Mecánica Estadística.

C.3. Reducción de la dinámica del gas para bajas temperaturas y velocidades pequeñas

Esta expresión es equivalente al negativo de la ecuación de la energía libre de un gas monatómico ideal, como se obtiene en la teoría cinética usual. Por lo tanto, se obtienen inmediatamente, a través de (C.35), por diferenciación de acuerdo con (C.3), (C.4) y (C.5) (o también por (C.17), (C.18), (C.19), (C.20) considerando (C.34)), las cantidades conocidas de un gas en reposo:

$$p_0 = \frac{kNT}{V}, \quad (C.36)$$

$$\bar{S}_0 = kN \left(\frac{3}{2} \ln T + \ln V \right) + \frac{3}{2}kN + D, \quad (C.37)$$

$$\bar{E}_0 = \frac{3}{2}kNT + Nmc^2, \quad (C.38)$$

$$\bar{R}_0 = \frac{5}{2}kNT + Nmc^2. \quad (C.39)$$

Como es evidente de (C.38) [11], en estas fórmulas Nmc^2 significa la energía interna, para el cero de la temperatura absoluta, de un gas en reposo.

La expresión aproximada \bar{H} para el potencial cinético de un gas en movimiento se obtiene por (C.35) a través de (C.8) y (C.7), o también por (C.21) a través de (C.34) a saber:

$$\bar{H} = kNT \left\{ \frac{3}{2} \ln T + \ln V - \frac{5}{4} \ln \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right) \right\} - Nmc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} + DT. \quad (C.40)$$

La diferenciación de esta función lleva, debido a (C.3), (C.1), (C.4), (C.5) y (C.13), a las cantidades termodinámicas aproximadas del gas en movimiento. Por otra parte, también se pueden obtener de (C.22) hasta (C.29), por la reducción de acuerdo con (C.34), o finalmente, de manera más clara, por la combinación de las fórmulas generales (C.30) hasta (C.33), (C.12) y (C.14) con las fórmulas reducidas (C.36) hasta (C.39).

Las ecuaciones que se obtienen a partir de alguna de estas maneras son:

$$p = \frac{kNT}{V} \quad (\text{C.41})$$

$$\bar{S} = kN \left\{ \frac{3}{2} \ln T + \ln V - \frac{5}{4} \ln \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right) \right\} + \frac{3}{2} kN + D, \quad (\text{C.42})$$

$$\bar{G} = \frac{5q}{2c^2 \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right)} kNT + \frac{Nm q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad (\text{C.43})$$

$$\bar{E} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{q^2}{c^2}}{1 - \frac{q^2}{c^2}} kNT + \frac{Nmc^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad (\text{C.44})$$

$$\bar{R} = \frac{5}{2 \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right)} kNT + \frac{Nmc^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad (\text{C.45})$$

$$\bar{M}_t = \frac{5}{2c^2 \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right)} kNT + \frac{Nm}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad (\text{C.46})$$

$$\bar{M}_l = \frac{5}{2c^2} \frac{1 + \frac{q^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right)^2} kNT + \frac{Nm}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} \right)^3}, \quad (\text{C.47})$$

$$\bar{M} = \frac{5}{2c^2} kNT + Nm. \quad (\text{C.48})$$

Debido a que la estructura de estas fórmulas reducidas es extraordinariamente más simple que la de las originales, las propiedades generales de la dinámica relativista son más claros que en el párrafo anterior, refiriéndose, por ejemplo, a la energía, a las definiciones de masa y a la función de calor de Gibbs. Como se nota en (C.43) hasta (C.48), el primer sumando de cada función es tanto térmico, como mecánico, y por lo tanto no depende del estado interno del gas en movimiento. Por otro lado, el segundo sumando es puramente mecánico; permaneciendo por sí solo para la temperatura $T = 0$; en ese caso las fórmulas, debido a su naturaleza asintótica, son matemáticamente válidas de manera estricta, si la velocidad q del gas no se acerca a la velocidad de la luz. Estas funciones a $T = 0$ se denominan añadiendo arriba el índice cero, y son:

$$\begin{cases} G^{(0)} = \frac{Nm q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, & E^{(0)} = R^{(0)} = \frac{Nmc^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \\ M_t^{(0)} = \frac{Nm}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, & M_l^{(0)} = \frac{Nm}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} \right)^3}, \quad M^{(0)} = Nm; \end{cases} \quad (\text{C.49})$$

que son bien conocidas de la mecánica relativista de la masa puntual [12].

C.4. Tipos de movimientos especiales de los gases

Ahora se quiere discutir brevemente algunos tipos de movimiento reversibles del gas, para lo cual se utilizará, como comparación, el comportamiento de la radiación del cuerpo negro.

Cuando se realiza una aceleración reversible *adiabática-isobárica* (es decir, sin suministro de calor y con presión constante) desde el reposo hasta la velocidad q , tanto en nuestro gas como en la radiación de cuerpo negro, la temperatura disminuye de T_0 a T en cada cuerpo según la ecuación [13]

$$T : T_0 = \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{1/2} : 1, \quad (\text{C.50})$$

y también disminuye el volumen en la misma proporción de V_0 a V :

$$V : V_0 = \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{1/2} : 1. \quad (\text{C.51})$$

Si este proceso se lleva a cabo de forma reversible *adiabática-isocórica* (sin suministro de calor y a volumen constante) entonces se debe cancelar la contracción de Lorentz dada por (C.51) y en consecuencia, el gas o la radiación de cuerpo negro deben dilatarse. Además, en ambos sistemas la temperatura disminuye aún más que en (C.50).

Debido a la fórmula (C.42) para la entropía del gas monoatómico, la disminución de la temperatura está dada aproximadamente por:

$$\bar{T} : T_0 = \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{5/6} : 1. \quad (\text{C.52})$$

en consecuencia, la presión disminuye de acuerdo con (C.41), debido a la constancia de V .

Por otro lado para la radiación de cuerpo negro la disminución de la temperatura está dada estrictamente [14] por:

$$T : T_0 = \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{2/3} : 1; \quad (\text{C.53})$$

que ni siquiera es la mitad que la de este gas.

La relación exacta para el gas, correspondiente a la ecuación (C.52) es bastante complicada. Se deduce de (C.23) a saber:

$$\begin{aligned} & -\frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT} \frac{iH_2^{(1)'}\left(\frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT}\right)}{H_2^{(1)}\left(\frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT}\right)} + \ln \left[-iH_2^{(1)}\left(\frac{mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{kT}\right) \right] + \ln T \\ & = \ln \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right) - \frac{mc^2}{kT_0} \frac{iH_2^{(1)'}\left(\frac{mc^2}{kT_0}\right)}{H_2^{(1)}\left(\frac{mc^2}{kT_0}\right)} + \ln \left[-iH_2^{(1)}\left(\frac{mc^2}{kT_0}\right) \right] + \ln T_0. \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

A través de estas ecuaciones trascendentales y a partir de los valores de T_0 y q , se puede calcular el valor exacto T .

De lo dicho anteriormente, al mismo tiempo se obtiene que, en una aceleración reversible *isotérmica-isocórica*, tanto en el gas como en la radiación de cuerpo negro, debe haber un suministro de calor para mantener la temperatura constante. También la presión del gas se mantiene constante debido a (C.41).

Como fue mencionado inicialmente, se deberá discutir con más detalle el movimiento reversible *adiabático-isobárico* del gas, porque ocupa un lugar privilegiado. Durante este procedimiento se cambian los valores de T y V de acuerdo con (C.50) y (C.51).

Si en la cantidad de movimiento G de la expresión (C.24) que es válida en general, se sustituye la variable T por la constante T_0 dada por (C.50), entonces, llamando Γ a la cantidad de movimiento espacial para aceleraciones adiabáticas-isobáricas, se obtiene después de extraer un factor común, que

$$\Gamma = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \left\{ \frac{2kNT_0}{c^2} - Nm \frac{iH_2^{(1)'} \left(i \frac{mc^2}{kT_0} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2}{kT_0} \right)} \right\}.$$

Dado que la cantidad entre paréntesis, según (C.29) es la masa del gas correspondiente a la temperatura en reposo T_0 :

$$M_{T_0} = \frac{2kNT_0}{c^2} - Nm \frac{iH_2^{(1)'} \left(i \frac{mc^2}{kT_0} \right)}{H_2^{(1)} \left(i \frac{mc^2}{kT_0} \right)}, \quad (C.55)$$

entonces la cantidad de movimiento toma aquí la forma especial:

$$\Gamma = \frac{M_{T_0} q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}. \quad (C.56)$$

Debido a que la masa M_{T_0} es constante durante todo el movimiento, cuando se especifica T_0 , entonces la cantidad de movimiento del gas tiene aquí la misma forma que la de una masa puntual (Cf. final de la Sec. C.3). Es decir:

“Un gas acelerado de manera reversible adiabática-isobárica se mueve de acuerdo con las mismas leyes que una masa puntual en el vacío; sin embargo, su masa depende de la temperatura en reposo T_0 , de acuerdo con la fórmula (C.56).”

Este resultado obtenido a través de cálculos directos de nuestras fórmulas especiales, es un caso particular de un teorema general de Planck [15]. En cualquier movimiento reversible adiabático-isobárico, (por ejemplo, también para la radiación de cuerpo negro) se puede deducir la cantidad de movimiento a través de un potencial cinético de la forma

$$K = -Mc^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}},$$

donde M es la masa del sistema es constante durante el movimiento y depende de V_0 y T_0 , el volumen y la temperatura en reposo respectivamente, según la relación (Véase (C.14))

$$M = \frac{R_0}{c^2}.$$

En particular, el potencial cinético de una partícula puntual es de la forma K , donde sin embargo, M es una constante absoluta. Por lo tanto, todos los movimientos adiabático-isobáricos reversibles, son en realidad, análogos al movimiento de una partícula puntual, debido a que se deducen a partir de un potencial cinético K .

C.5. El valor numérico de la masa de los gases

Al final se quiere discutir numéricamente la expresión para la masa relativista del gas con un ejemplo. Como gas ideal monatómico se escoge el *Helio* (He=33). Se quiere calcular M_1 de un mol de éste, que tiene N_1 moléculas (constante de Loschmidt) de masa m . Como fue mencionado antes (Secc. C.3), se puede usar la fórmula aproximada (C.48) hasta 1/10 de billón de grados. Si en ésta se introduce la constante absoluta del gas B correspondiente a un mol, a través de la relación obtenida de (C.22)

$$kN_1 = B,$$

entonces se obtiene:

$$\bar{M}_1 = \frac{5BT}{2c^2} + N_1m. \quad (\text{C.57})$$

Mediante los valores numéricos

$$B = 0,8316 \times 10^8 \frac{erg}{grad}, \quad c = 3 \times 10^{10} \frac{cm}{s}, \quad N_1m = 3,99 g,$$

se obtiene inmediatamente que

$$\bar{M}_1 = 2,31 \times 10^{-13} T + 3,99 g. \quad (\text{C.58})$$

Entonces para $T = 10^{11} abs$, es:

$$\bar{M}_1 = 0,0231 + 3,99 g = 4,0131 g.$$

La corrección de la masa relativista de un gas en comparación con su masa habitual Nm , debido a su energía calorífica alcanza entonces hasta 1/10 de billón de grados, un valor que es prácticamente despreciable, ya que la corrección, es 0,5 % para el Helio.

Por otro lado, para temperaturas cercanas a 10^{11} grados, la masa inercial μ_1 de la radiación de cuerpo negro, contenida en el volumen V_1 de un mol de Helio, siempre supera extremadamente a la masa M_1 del gas, aunque disminuya V_1 , dado que la fracción de compresión de un gas prácticamente está limitado por el volumen de sus moléculas. La masa de la radiación es

$$\mu_1 = \frac{4a}{3c^2} T^4 V_1, \quad (\text{C.59})$$

o dado que

$$a = 7,061 \times 10^{-15} \frac{erg}{cm^3 grad^4}$$

es,

$$\mu_1 = 1,05 \times 10^{-35} T^4 V_1 g. \quad (C.60)$$

Si se supone al Helio como un gas ideal se puede comprimir hasta una densidad de 4,0131 así como V_1 es igual a 1 cm^3 y por lo tanto para $T = 10^{11}$ abs. se obtiene el valor extraordinariamente grande

$$\mu_1 = 1,05 \times 10^9 g,$$

contra $\bar{M}_1 = 4,0131 g$ que es despreciable.

Breslau, Abril 15, 1911.

(Recibido, 19 Abril 1911).

Bibliografía

- [1] H. v. Helmholtz, Crelles Journ. f. Nath. **100**. p. 137-166 y p. 213-222. 1886; Wissensch. Abh. **3**. p. 203-248. Leipzig 1895.
- [2] M. Planck, Ann. d. Phys. **26**. p. 1-34. 1908.
- [3] F. Jüttner, Ann. d. Phys. **34**. p. 856-882. 1911.
- [4] M. Planck, 1. c. p. 26, ecuación (47).
- [5] M. Planck, 1. c. p. 25, ecuación (46).
- [6] F. Jüttner, 1. c. p. 876, ecuación (54²).
- [7] M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig 1906.
- [8] M. Planck, Ann. d. Phys. **26**. p. 24 y 25. ecuaciones (39), (40), (42), (45), etc.
- [9] F. Jüttner, 1. c. p. 880.
- [10] E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln, p. 100. Leipzig 1909. Cf. también P. Schafheitlin; Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig. **19**. p. 120-129. 1910.
- [11] Cf. F. Jüttner, 1. c. p. 880.
- [12] M. Planck, Verh. d. Deutseh. Physik. Ges. **8**. p. 136-141. 1906; o bien Acht Vorlesungen über theoretische Physik, Leipzig 1910. p. 124.
- [13] M. Planck, Ann. d. Phys. **26**. p. 15 y 16. 1908.

[14] M. Planck, Ann. d. Phys. **26**. p. 9. 1908.

[15] M. Planck, Ann. d. Phys. **26**. p. 33 y 34. 1908.

100 años de teoría cinética relativista se terminó de imprimir en junio de 2013 en los talleres de Master Copy, S. A. de C. V., Avenida Coyoacán 1450 bis, colonia Del Valle, 03220 México, D. F. La edición consta de 300 ejemplares y estuvo al cuidado de los editores y de Guadalupe González Aragón.