Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

Área de Sistemas Complejos

Departamento de Física

División de Ciencias de Básicas e Ingeniería

Absorción en parches absorbentes de diferentes geometrías

Proyecto Terminal II: Investigación Teórica

Jaime Torres Juárez

Asesor

Dr. Leonardo Dagdug

Introducción:

En la primera parte del proyecto, lo que hicimos fue desarrollar la Fórmula de Hill para una simetría circular, con el objetivo de calcular la constante de velocidad con la cuál un determinado número de partículas pasan a través de una membrana circular. El resultado que obtuvimos para la constante de Hill fue:

$$k = \frac{4Da}{V}$$

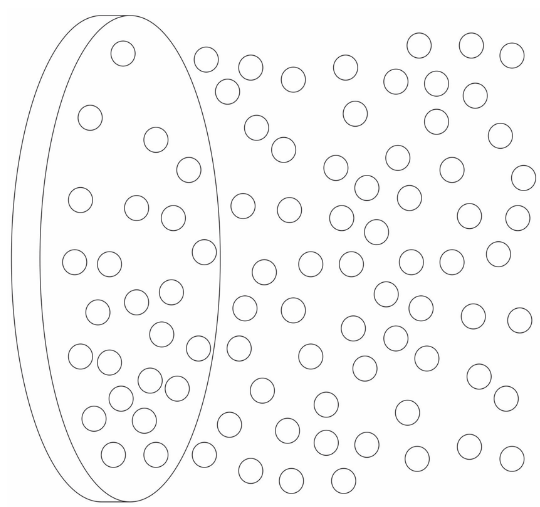

Fig a. Podemos observar un determinado numero de partículas que atraviesan una membrana Circular

En esta segunda parte del Proyecto desarrollaremos la Fórmula de Hill para una simetría Elipsoidal y posteriormente para cualquier otra simetría en general. Permitiéndonos modelar la forma en como los receptores ubicados en la superficie de una célula y cuyas formas son arbitrarias, absorben las moléculas de su alrededor.

Partiremos del desarrollo de la teoría para el ligando influenciado por difusión que se une a receptores de forma arbitraria en una superficie celular[*] que fue sugerido por Berg y Purcell y posteriormente fue generalizado por Zwanzig y Szabo, la cual supone que los receptores son discos circulares absorbentes o en otro caso esferas reflejantes. Una de las ideas principales para esta teoría es la solución de la constante de velocidad para la unión del ligando a un único receptor circular en un plano reflejante. Daremos una solución exacta para la constante de velocidad de unión a un único receptor elíptico y una aproximación de la constate de velocidad de unión a un receptor con forma arbitraria.

Desarrollo:

La teoría de la unión de ligandos a receptores ubicados arbitrariamente en la superficie de una célula fue primeramente propuesta por Berg y Purcell, en ella asumimos que los receptores son parches circulares absorbentes de radio a, que cubren una pequeña fracción de la superficie de una célula esférica de radio R, mientras que la superficie restante de la célula tiene como como propiedad ser reflejante.

Fig 2. Esfera de radio R, cuyos parches son de radio a y donde claramente podemos observar que $a \ll R$

La teoría de Berg y Purcell expresa su constante de velocidad, en términos de la constante de Smoluchowski $k_{SM} = 4\pi Dr$, donde D es la constante de difusión para los ligandos, y por lo tanto la fórmula de Hill, para la constante de velocidad, estará dada por:

$$k_{circulo} = 4Da \tag{1}$$

Lo que tiene perfecto sentido, ya que como dedujimos en la primera parte del proyecto la Fórmula de Hill es $k = \frac{4Da}{V}$, pero como en esta ocasión estamos pensando en un círculo plano, entonces $k = 4Da$. Ésta constante de velocidad caracteriza la unión de un ligando hacia un receptor circular aislado sobre un plano infinito reflejante.

Hasta ahora hemos encontrado la constante de velocidad para parches circulares absorbentes. ¿Pero qué sucede si los parches tienen otra geometría?

Pensemos ahora en que los parches absorbentes ubicados sobre la superficie de la célula, tienen una geometría elíptica, para encontrar la constante de velocidad para este tipo de receptores, recurrimos a la relación entre la constante de velocidad de una reacción limitada por difusión k y la capacitancia C del cuerpo que tiende a capturar los ligandos. Esta relación está dada por:

$$k = 4\pi DC \tag{2}$$

Ya obtuvimos una relación que nos permitirá encontrar la constante de velocidad para una geometría elíptica (el cálculo de C puede verse en el apéndice A).

Si uno de los ejes del elipsoide es igual a cero; entonces fácilmente podemos apreciar que el elipsoide (3D) se reduce a una elipse (2D) Fig.3:

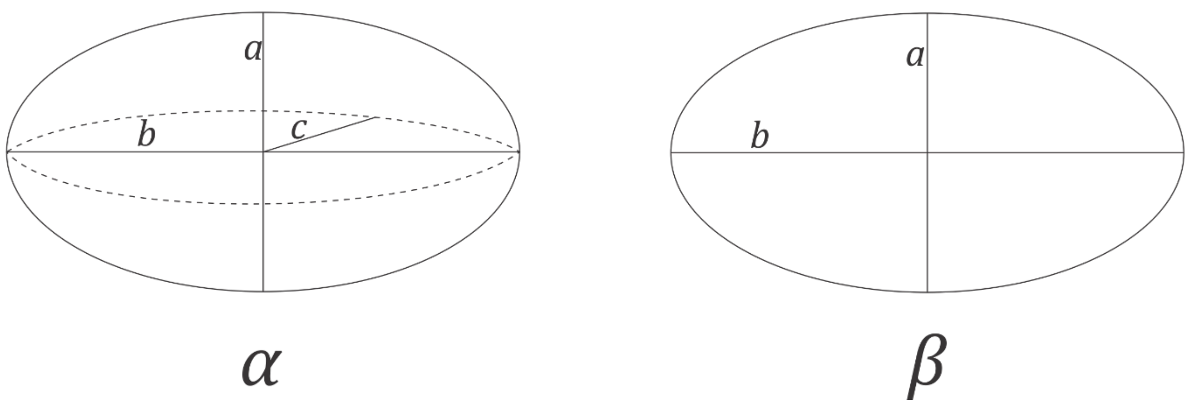

Fig 3. (α) Podemos observar un elipsoide con ejes a, b y c. (β) Tenemos una elipse con ejes a y b, con c=0

Para el problema que estamos estudiando, tenemos un receptor elíptico el cual podemos apreciar en la Fig. 4; y cuyos eje mayor y eje menor tienen una longitud respectiva de $2a_1$ y $2a_2$:

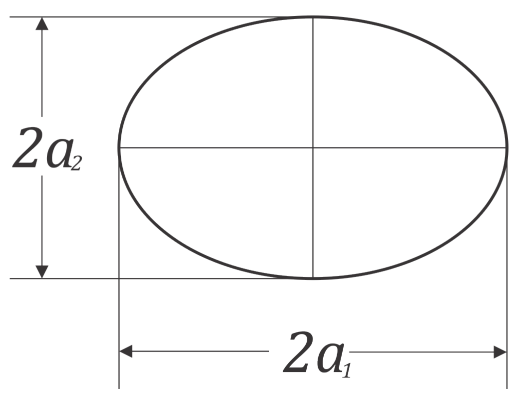

Fig 4. Parche elíptico con eje mayor $2a_1$ y eje menor $2a_2$

donde la excentricidad ϵ, de la elipse estará dada por:

$$\epsilon = \frac{\sqrt{{a_1}^2 - {a_2}^2}}{a_1}$$

De tal forma que la constante de velocidad para la elipse es:

$$k_{elipse} = \frac{2\pi D a_1}{K(\epsilon)} \tag{3}$$

Notemos que la constante k_{elipse} depende de una función $K(\epsilon)$ que es una *Integral elíptica completa de primer tipo* y cuyo valor es:

$$K(\epsilon) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \theta}} \tag{4}$$

Claramente aquí ϵ, es un parámetro que varía dependiendo de la forma del parche elíptico.

La Expresión k_{elipse} se puede reducir a $k_{circulo}$ cuando $\epsilon = 0$, como se muestra a continuación:

$$k_{elipse} = \frac{2\pi D a_1}{\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \theta}}} = \frac{2\pi D a_1}{\int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{2\cancel{\pi} D a_1}{\frac{\cancel{\pi}}{2}} = 4Da; \qquad \epsilon = 0$$

En el análisis que hemos hecho previamente, utilizaremos el resultado de la ecuación (3), para construir una aproximación de la constante de velocidad para receptores con formas más generales. Para tal propósito usaremos el análisis dimensional.

Dado que la constante k tiene dimensiones de $(longitud)^3$ / $tiempo$; debe ser proporcional a D y a la longitud l. Entonces asumiremos que esta longitud puede ser expresada en términos del área A del receptor y su perímetro P, de la siguiente manera:

$$l = A^v P^{1-2v}$$

donde v es un parámetro que determinaremos más adelante. La fórmula resultante es:

$$k = \frac{2^{1+2v}}{\pi^{1-v}} A^v P^{1-2v} D \tag{5}$$

El factor numérico en esta expresión se obtiene al requerir que k se reduzca a $k_{círculo}$ (como en la ecuación 1) para el receptor circular.

Para encontrar v requeriremos que la expresión para k en la ecuación (5) concuerde con k_{elipse} en la ecuación (3), para pequeños valores de ϵ hasta términos de orden ϵ^4. Una pequeña expansión de ϵ en k_{elipse} está dada por (Ver apéndice B):

$$k_{elipse} = 4a_1 D\left[1 - \frac{1}{4}\epsilon^2 - \frac{5}{64}\epsilon^4 + O(\epsilon^6)\right] \tag{6}$$

Para encontrar una expansión tal que $k = k_{Elipse}^{Aprox}$. Tomaremos los siguientes valores A_{elipse} y P_{elipse}:

$$A_{elipse} = \pi a_1 a_2$$

Sin embargo sabemos que: $\epsilon = \frac{\sqrt{{a_1}^2 - {a_2}^2}}{a_1}$, despejando a_2

$$a_1\epsilon = \sqrt{{a_1}^2 - {a_2}^2}$$

$${a_1}^2\epsilon^2 = {a_1}^2 - {a_2}^2$$

$${a_2}^2 = {a_1}^2 - {a_1}^2\epsilon^2$$

$$a_2 = \sqrt{{a_1}^2 - {a_1}^2\epsilon^2}$$

Factorizando a_1:

$$a_2 = \sqrt{{a_1}^2(1-\epsilon^2)} = a_1\sqrt{1-\epsilon^2}$$

Sustituyendo a_2 en A_{elipse}:

$$A_{elipse} = \pi a_1\left(a_1\sqrt{1-\epsilon^2}\right) = \pi {a_1}^2\sqrt{1-\epsilon^2}$$

Por otra parte

$$P_{elipse} = 4a_1 E(\epsilon)$$

donde $E(\epsilon)$ es una *Integral elíptica completa de segundo tipo.*

$$E(\epsilon) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2\sin^2\theta}\ d\theta \tag{7}$$

Ahora sustituimos en la Ecuación (5), para encontrar k_{elipse}^{aprox}, con lo que obtenemos la siguiente ecuación:

$$k_{alipse}^{aprox} = \frac{2^{1+2v}}{\pi^{1-v}} \left(\pi {a_1}^2 \sqrt{1-\epsilon^2}\right)^v \left(4a_1 E(\epsilon)\right)^{1-2v} D$$

Para resolver necesitamos hacer una pequeña expansión de ϵ hasta orden ϵ^4 (Ver Apéndice C):

$$k_{alipse}^{aprox} = 4a_1 D \left[1 - \frac{1}{4}\epsilon^2 - \frac{3(2v+1)}{64}\epsilon^4 + O(\epsilon^6)\right] \quad (8)$$

Para obtener el valor de ν; necesitamos que $k_{alipse}^{aprox} = k_{elipse}$ podemos ver que el coeficiente del termino ϵ^4, es necesario que:

$$3(2v+1) = 5$$

$$6\nu + 3 = 5$$

$$6\nu = 2$$

$$\therefore \ \nu = \frac{1}{3}$$

De tal forma que la Ecuación (5), nos queda de la forma:

$$k = \frac{2^{1+2\left(\frac{1}{3}\right)}}{\pi^{1-\left(\frac{1}{3}\right)}} A^{\left(\frac{1}{3}\right)} P^{1-2\left(\frac{1}{3}\right)} D = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}} A^{\frac{1}{3}} P^{\frac{1}{3}} D$$

Factorizando:

$$k = \left(\frac{2^5 AP}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} D = \left(\frac{32AP}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} D$$

Hemos llegado a la conclusión de que la Constante de velocidad está sujeta al área y perímetro para cualquier geometría que deseemos tratar.

Podemos comprobar este resultado, para $k_{circulo}$, con radio a_1 donde:

$$A_{circulo} = \pi a_1^2$$

$$P_{circulo} = 2\pi a_1$$

$$k_{circulo} = \left(\frac{32(\pi a_1^2)(2\pi a_1)}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} D = \left(\frac{64\cancel{\pi^2} a_1^3}{\cancel{\pi^2}}\right)^{\frac{1}{3}} D = 4a_1 D$$

Efectivamente recuperamos la fórmula de Hill para una geometría Circular:

$$k_{circulo} = 4a_1 D$$

Apéndice A

Obtención de c

Pensemos en un conductor elipsoidal cargado, para resolver este problema es necesario trabajar con *coordenadas elipsoidales*, las cuales están relacionadas con las coordenadas cartesianas por la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1 \qquad (a>b>c) \tag{1}$$

Como podemos observar al ser cúbica en u, tendrá tres raíces reales diferentes ξ, η, ζ las cuales se encuentran en los siguientes rangos:

$$\xi \geq -c^2, \qquad -c^2 \geq \eta \geq -b^2, \qquad -b^2 \geq \zeta \geq -a^2 \tag{2}$$

Estas tres raíces pertenecen a las coordenadas elipsoidales de los puntos x, y, z. Su significado geométrico se ve desde el hecho de que las superficies de constante a, b y c son respectivamente elipsoides e hiperboloides de una y dos hojas, todas confocales con el elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3}$$

Una superficie de cada una de las tres familias pasa a través de cada punto en el espacio, y las tres superficies son ortogonales. La fórmula para transformar de coordenadas elipsoidales a cartesianas se da resolviendo tres ecuaciones simultaneas del tipo (1), las cuales son:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}}, \\ y &= \pm\sqrt{\frac{(\xi + b^2)(\eta + b^2)(\zeta + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)}}, \\ z &= \pm\sqrt{\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)(\zeta + c^2)}{(a^2 - c^2)(b - c^2)}}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

El elemento de longitud en coordenadas elipsoidales es:

$$\left.\begin{gathered} dl^2 = {h_1}^2 d\xi^2 + {h_2}^2 d\eta^2 + {h_1}^2 d\zeta^2 \\ h_1 = \sqrt{\frac{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}{2R_\xi}}; \quad h_2 = \sqrt{\frac{(\eta - \zeta)(\eta - \xi)}{2R_\eta}} \\ h_3 = \sqrt{\frac{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}{2R_\zeta}}; \quad {R_u}^2 = (u + a^2)(u + b^2)(u + c^2) \\ u = \xi, \eta, \zeta \end{gathered}\right\} \tag{5}$$

En consecuencia, la ecuación de Laplace en estas coordenadas será:

$$\nabla \phi = \frac{4}{(\xi - \eta)(\zeta - \xi)(\eta - \zeta)} \times \tag{6}$$

$$\times \left[(\eta - \zeta) R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(R_\xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi) R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta}\left(R_\eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + (\xi - \eta) R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(R_\zeta \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \right] = 0$$

Si dos de los semiejes a, b, c, son iguales, entonces el sistema de coordenadas elipsoidales degenera. Es decir $a = b > c$. Entonces la ecuación cúbica (1), se convierte en una cuadrática:

$$\frac{\rho^2}{a^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1, \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 \tag{7}$$

Con dos raíces cuyos valores se encuentran en los rangos $\xi \geq -c^2, -c^2 \geq \eta \geq -a^2$ Las superficies de coordenadas constantes ξ y η se hacen respectivamente *esferoides confocales oblatos* e *hiperboloides confocales de revolución de una hoja* (Fig.a). Como tercera coordenada podemos tomar como ángulo polar ϕ en el plano xy, es decir $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$. Para $a = b$ la coordenada elipsoidal ζ, degenera a la constante $-a^2$. Su relación con el ángulo ϕ está dada por el hecho de que tiende a $-a^2$, de la mima manera en que b tiende hacia a, esto es:

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{a^2 + \zeta}{a^2 - b^2}} \quad \text{cuando } b \to a$$

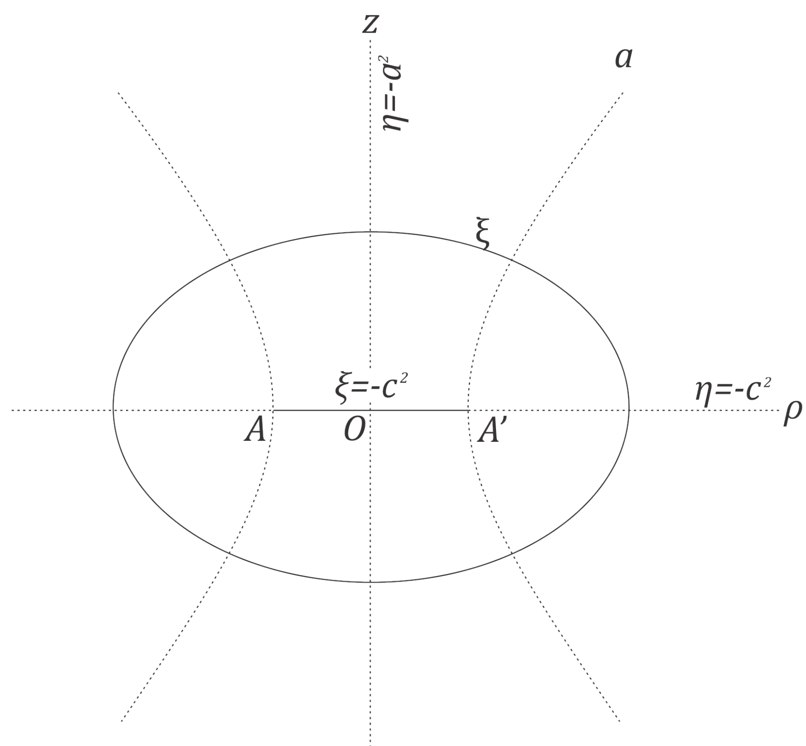

Fig. a

Esto se ve fácilmente desde (4) o directamente desde (1). Por otra parte, la relación entre las coordenadas z, ρ y las coordenadas ξ, η, está dada de acuerdo a (4),de la siguiente manera:

$$z = \pm\sqrt{\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)}{c^2 - a^2}}, \qquad \rho = \sqrt{\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)}{a^2 - c^2}}, \tag{9}$$

Las coordenadas ξ, η, ϕ son llamadas *Coordenadas esferoidales oblatas.*

Similarmente para $a > b = c$ las coordenadas elipsoidales, se llaman *Coordenadas esferoidales prolatas.* Las dos coordenadas ξ y ζ son raíces de la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{\rho^2}{b^2 + u} = 1, \qquad \rho^2 = y^2 + z^2, \tag{10}$$

donde $\xi \geq -b^2, -b^2 \geq \zeta \geq -a^2$. Las superficies de constante ξ y ζ son esferoides prolatos e hiperboloides de revolución de dos hojas (Fig. b). La coordenada η degenera en una constante, $-b^2$, cuando $c \to b$, de tal forma que tendremos:

$$\cos\phi = \sqrt{\frac{b^2 + \eta}{b^2 - c^2}} \tag{11}$$

donde ϕ es el ángulo polar en el plano yz. La relación entre la coordenadas x, ρ y las coordenadas ξ, ζ está dada por:

$$x = \pm\sqrt{\frac{(\xi + a^2)(\zeta + a^2)}{a^2 - b^2}}, \qquad \rho = \sqrt{\frac{(\xi + b^2)(\zeta + b^2)}{b^2 - a^2}}, \tag{12}$$

En un sistema de coordenadas esferoidales oblatas, el foco de los esferoides y los hiperboloides se encuentra en un círculo de radio $\sqrt{a^2 - c^2}$ ubicado en el plano xy; Fig. a. donde AA' es el diámetro de este círculo. Dibujemos un plano que pasa por el eje z y algún punto P. Este intersecta el círculo focal en dos puntos; donde sus distancias desde P sean r_1, r_2. Si las coordenadas de P son ρ, z, entonces:

$$r_1{}^2 = \left[\rho - \sqrt{a^2 - c^2}\right]^2 + z^2, \qquad r_2{}^2 = \left[\rho + \sqrt{a^2 - c^2}\right]^2 + z^2$$

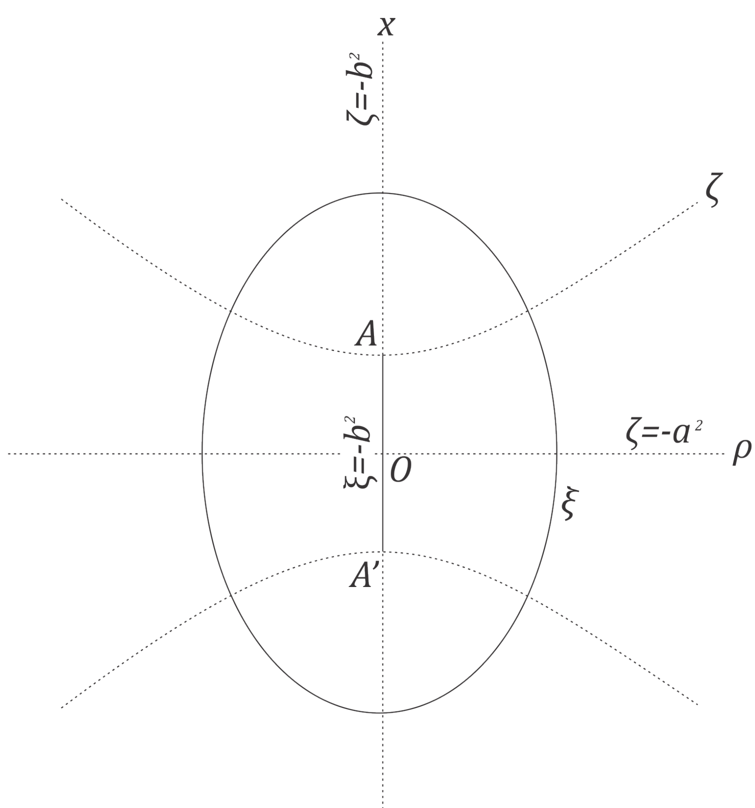

Fig. b

Las coordenadas esferoidales ξ, η están dadas en términos de r_1, r_2 por:

$$\xi = \frac{1}{4}(r_1 + r_2)^2 - a^2, \qquad\qquad \eta = \frac{1}{4}(r_2 - r_1)^2 - a^2 \tag{13}$$

En un sistema de coordenadas esferoidales prolatas, el foco se encuentra en los puntos $x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$ en eje x (es decir los puntos A, A' en la Fig. b). Si r_1 y r_2 son las distancias desde el foco al punto P, entonces:

$$r_1{}^2 = \rho^2 + \left[z - \sqrt{a^2 - b^2}\right]^2, \qquad\qquad r_2{}^2 = \rho^2 + \left[z + \sqrt{a^2 - b^2}\right]^2,$$

y las coordenadas esferoidales ξ, ζ están dadas en términos de r_1, r_2 por la misma ecuación (13), con ζ en lugar de η.

Pasemos ahora al problema del campo de un elipsoide cargado cuya superficie viene dada por la ecuación (3). En coordenadas elipsoides esta es la superficie $\xi = 0$. Por lo tanto, es evidente que si buscamos el potencial de campo sólo en función de ξ, toda la superficie elipsoidal $\xi = cte$, y en particular la superficie del conductor, serán superficies equipotenciales. La ecuación de Laplace (6) toma la forma:

$$\frac{d}{d\xi}\left(R_\xi \frac{d\phi}{d\xi}\right) = 0,$$

de donde:

$$\phi(\xi) = A\int_\xi^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}$$

El límite superior de integración se toma para que el campo sea cero en el infinito.

La constante A se determina más sencillamente a partir de la condición de que a una distancia grande r el campo debe ser un campo de Coulomb y $\phi \cong {}^{e}/_{r}$, donde e es la carga total sobre el conductor. Cuando $r \to \infty$, $\xi \to \infty$, y $\xi \cong r^2$ tal como podemos ver de la ecuación (4) con $u = \xi$. Para grandes ξ tenemos $R_\xi \cong \xi^{3/2}$ y $\phi \cong \frac{2A}{\sqrt{\xi}} = \frac{2A}{r}$. Por lo tanto $2A = e$, y por consiguiente:

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2}e\int_\xi^\infty \frac{d\xi}{R_\xi} \tag{14}$$

La integral es una integral elíptica de primera clase. La superficie del conductor corresponde a $\xi = 0$, y así la capacidad del conductor estará dada por:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi} \tag{15}$$

La distribución de carga sobre la superficie del elipsoide está determinada por la derivada normal del potencial:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]_{\xi=0} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right]_{\xi=0} = \frac{e}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{\eta\zeta}}$$

De la ecuación (4) es fácil ver que para $\xi = 0$

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{\eta\zeta}{a^2b^2c^2}$$

Por lo tanto

$$\sigma = \frac{e}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1} \tag{16}$$

Para un esferoide las integrales (14), (15) degeneran y pueden ser expresadas en términos de funciones elementales. Para un esferoide prolato $(a > b = c)$ el campo potencial es:

$$\phi = \frac{e}{\sqrt{a^2 - b^2}}\tanh^{-1}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\xi + a^2}}, \tag{17}$$

Y por lo tanto la Capacidad es:

$$C = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\cosh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)} \tag{18}$$

Para un esferoide oblato $(a = b > c)$, tenemos que:

$$\phi = \frac{e}{\sqrt{a^2 - c^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}}, \qquad C = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\cos^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)} \tag{19}$$

En particular, para un disco circular $(a = b,\ \ c = 0)$

$$C = \frac{2a}{\pi} \tag{20}$$

Apéndice B

Obtención de k_{elipse}

Tenemos que la ecuación (4) es una *Integral Elíptica de Segundo Tipo:*

$$K(\epsilon) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\epsilon^2 \sin^2\theta}}$$

La cual podemos escribir de la siguiente manera:

$$K(\epsilon) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\epsilon^2 \sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2} (1-\epsilon^2 \sin^2\theta)^{-1/2}\ d\theta = \cdots$$

Ahora desarrollamos la integral en serie, usando la serie Binomial:

$$\boxed{\begin{gathered}(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n \\ \text{donde: } \binom{k}{n} = \frac{k!}{n!\,(k-n)!}\end{gathered}}$$

$$\ldots = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-\epsilon^2\ Sin^2\ \theta)^n\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \left(-\epsilon^2\right)^n\ (Sin^{2n}\ \theta)\ d\theta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \left(-\epsilon^2\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2n}\ \theta\ \ d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}!}{n!\left(-\frac{1}{2}-n\right)!} \left(-\epsilon^2\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2n}\ \theta\ \ d\theta$$

Dividiremos la Suma en dos partes, de la siguiente manera:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{-\frac{1}{2}!}{n!\left(-\frac{1}{2}-n\right)!} (-\epsilon^2)^n}_{} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2n}\ \theta\ \ d\theta}_{}$$

Ahora expandiremos la suma hasta orden ϵ^4, para esto lo haremos parte por parte:

Para $n = 0$:

$$\frac{-\frac{1}{2}!}{0!\left(-\frac{1}{2}-0\right)!}(-\epsilon^2)^0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2(0)}\,\theta \;\; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Entonces:

$$\frac{-\frac{1}{2}!}{0!\left(-\frac{1}{2}-0\right)!}(-\epsilon^2)^0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2(0)}\,\theta \;\; d\theta = (1)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Para $n = 1$:

$$\frac{-\frac{1}{2}!}{1!\left(-\frac{1}{2}-1\right)!}(-\epsilon^2)^1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{1\left(-\frac{3}{2}\right)!}\epsilon^2 = -\frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{-2\cancel{\sqrt{\pi}}}\epsilon^2 = \frac{\epsilon^2}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^2\,\theta \;\; d\theta =$$

sabemos que: $Sin^2\,\theta = \dfrac{1 - Cos\,2\theta}{2}$

Entonces:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^2\,\theta \;\; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - Cos\,2\theta}{2} \;\; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Cos\,2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos\,2\theta \;\, d\theta$$

Pero $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos\,2\theta \;\, d\theta = 0$

Entonces:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^2\,\theta \;\; d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto:

$$\frac{-\frac{1}{2}!}{1!\left(-\frac{1}{2}-1\right)!}(-\epsilon^2)^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2(1)}\,\theta \;\; d\theta = \left(\frac{\epsilon^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\epsilon^2}{8}$$

Para $n = 2$:

$$\frac{-\frac{1}{2}!}{2!\left(-\frac{1}{2}-2\right)!}(-\epsilon^2)^2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\left(-\frac{5}{2}\right)!}\epsilon^4 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\left(-\frac{4\sqrt{\pi}}{5}\right)}\epsilon^4 = \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\frac{8\cancel{\sqrt{\pi}}}{5}}\epsilon^4 = \frac{5}{8}\epsilon^4$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^4\,\theta \;\; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (Sin^2)^2\,\theta \;\; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - Cos\,2\theta}{2}\right)^2 \;\; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - Cos\,2\theta\,)^2}{2^2} \;\; d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - Cos\,2\theta\,)^2\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2Cos\,2\theta + Cos^2\,2\theta\,)d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos\,2\theta\, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^2\,2\theta\, d\theta\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^2\,2\theta\, d\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + Cos\,4\theta}{2} \;\; d\theta\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos\,4\theta \;\; d\theta\right) =$$

Pero $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \; Cos\,4\theta \;\; d\theta = 0$; entonces:

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(0)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{16}$$

Por lo tanto:

$$\frac{-\frac{1}{2}!}{2!\left(-\frac{1}{2}-2\right)!}(-\epsilon^2)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2(2)}\,\theta \;\; d\theta = \left(\frac{5}{8}\epsilon^4\right)\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{5\pi\epsilon^4}{128}$$

Regresando a la suma principal, tenemos que expandiendo a términos de orden ϵ^4, obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}!}{n!\left(-\frac{1}{2}-n\right)!}(-\epsilon^2)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2n}\,\theta \;\; d\theta = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi\epsilon^2}{8}+\frac{5\pi\epsilon^4}{128}$$

Factorizando tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}!}{n!\left(-\frac{1}{2}-n\right)!}(-\epsilon^2)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2n}\,\theta \;\; d\theta = \frac{\pi}{2}\left[1+\frac{\epsilon^2}{8}+\frac{5\epsilon^4}{64}+O(\epsilon^6)\right]$$

Apéndice C

Obtención de k_{alipse}^{aprox}

Tenemos que:

$$k_{alipse}^{aprox} = \frac{2^{1+2v}}{\pi^{1-v}}\left(\pi {a_1}^2\sqrt{1-\epsilon^2}\right)^v \left(4a_1 E(\epsilon)\right)^{1-2v} D$$

Por lo que tenemos que hacer una expansión de ϵ, hasta orden ϵ^4,

La serie de Mclaurin de una función $f(x)$ es la serie de Taylor de una función $f(x)$ en: $a = 0$

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \cdots}$$

Entonces para este caso tenemos que: $f(\epsilon) = \sqrt{1-\epsilon^2}$, con $a = 0$

$$f(\epsilon) = \sqrt{1-0^2} + \frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right)(0)}{1!}x + \frac{\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right)(0)}{2!}x^2$$
$$+ \frac{\frac{d^3}{dx^3}\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right)(0)}{3!}x^3 + \frac{\frac{d^4}{dx^4}\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right)(0)}{4!}x^4 + \cdots =$$

Obtenemos las Derivadas correspondientes:

$f(\epsilon) = \sqrt{1-\epsilon^2}$

en el punto $\epsilon = 0$:

$$f(\epsilon) = 1$$

$$f'(\epsilon) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right) = \frac{d}{dx}(1-\epsilon^2)^{\frac{1}{2}} = -\cancel{2}\,\epsilon\left(\frac{1}{\cancel{2}}(1-\epsilon^2)^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

en el punto $\epsilon = 0$:

$$= -\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}$$

$$f'(\epsilon)\text{=0}$$

$$f''(\epsilon) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right) =$$

$$= (-\epsilon)\left(-\cancel{2}\,\epsilon\left(\frac{1}{\cancel{2}}(1-\epsilon^2)^{-\frac{3}{2}}\right)\right) - (1-\epsilon^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1-\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}}$$

en el punto $\epsilon = 0$:

$$= -\frac{0^2}{(1-0^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1-0^2)^{\frac{1}{2}}} = -1$$

$$f''(\epsilon) = -1$$

$$f'''(\epsilon) = \frac{d^3}{dx^3}\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1-\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}}\right) =$$

$$= (-\epsilon^2)\left(-\cancel{2}\,\epsilon\left(\frac{3}{\cancel{2}}(1-\epsilon^2)^{-\frac{5}{2}}\right)\right) - 2\epsilon\,(1-\epsilon^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{\epsilon}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{3\epsilon^3}{(1-\epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2\epsilon}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\epsilon}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3\epsilon^3}{(1-\epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\epsilon}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

en el punto $\epsilon = 0$:

$$= -\frac{3(0)^2}{(1-(0)^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3(0)}{(1-(0)^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$f'''(\epsilon) = 0$$

$$f^{IV}(\epsilon) = \frac{d^4}{dx^4}\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{3\epsilon^3}{(1-\epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\epsilon}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\right) =$$

$$= (-3\epsilon^3)\left(-\cancel{2}\,\epsilon\left(\frac{5}{\cancel{2}}(1-\epsilon^2)^{-\frac{7}{2}}\right)\right) - (1-\epsilon^2)^{-\frac{5}{2}}(9\epsilon^2)$$

$$+ (-3\epsilon)\left(-\cancel{2}\,\epsilon\left(\frac{3}{\cancel{2}}(1-\epsilon^2)^{-\frac{5}{2}}\right) - (1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}(3)\right) =$$

$$= -\frac{15\epsilon^4}{(1-\epsilon^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{9\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{9\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{15\epsilon^4}{(1-\epsilon^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{18\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

en el punto $\epsilon = 0$:

$$= -\frac{15(0)^4}{(1-(0)^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{18(0)^2}{(1-(0)^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{(1-(0)^2)^{\frac{3}{2}}} = -3$$

$$f^{IV}(\epsilon) = -3$$

$$f^{V}(\epsilon) = \frac{d^5}{dx^5}\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{15\epsilon^4}{(1-\epsilon^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{18\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Por inducción podemos darnos cuenta que para f^{2n+1} es decir las derivadas impares:

$$f^{2n+1} = 0$$

Regresando a la serie:

$$f(\epsilon) = 1 + \frac{0}{1!}\epsilon + \frac{-1}{2!}\epsilon^2 + \frac{0}{3!}\epsilon^3 + \frac{-3}{4!}\epsilon^4 + \frac{0}{5!}\epsilon^5 + \frac{-45}{6!}\epsilon^6 + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 - \frac{3}{24}\epsilon^4 - \frac{45}{720}\epsilon^6 =$$

Simplificando:

$$\boxed{\sqrt{1-\epsilon^2} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 - \frac{1}{8}\epsilon^4 + O(\epsilon^6)}$$

Por otra parte, tenemos:

$$E(\epsilon) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2\theta}\ d\theta$$

Que es una I*ntegral Elíptica de Segundo Tipo,* por lo que nos apoyaremos de la serie Binomial para expandirla hasta orden ϵ^4 (como hicimos en el apéndice C):

$$E(\epsilon) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2\theta}\ d\theta = \int_0^{\pi/2} (1 - \epsilon^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\ d\theta$$

$$\boxed{\begin{gathered}(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n \\ \text{donde: } \binom{k}{n} = \frac{k!}{n!\,(k-n)!}\end{gathered}}$$

$$\ldots = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-\epsilon^2\ Sin^2\ \theta)^n\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left(-\epsilon^2\right)^n\ (Sin^{2n}\ \theta)\ d\theta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left(-\epsilon^2\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2n}\,\theta\ \ d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}!}{n!\left(\frac{1}{2}-n\right)!} \left(-\epsilon^2\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2n}\,\theta\ \ d\theta$$

Dividiremos la Suma en dos partes, de la siguiente manera:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}!}{n!\left(\frac{1}{2}-n\right)!}(-\epsilon^2)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2n}\,\theta \;\; d\theta$$

Ahora expandiremos la suma hasta orden ϵ^6, para esto lo haremos parte por parte:

Para $n = 0$:

$$\frac{\frac{1}{2}!}{0!\left(\frac{1}{2}-0\right)!}(-\epsilon^2)^0 = \left(\frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{1}{\left(\frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\cancel{2}}\right)}\right)\cancel{(-\epsilon^2)^0} = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2(0)}\,\theta \;\; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Entonces:

$$\frac{\frac{1}{2}!}{0!\left(\frac{1}{2}-0\right)!}(-\epsilon^2)^0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2(0)}\,\theta \;\; d\theta = (1)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Para $n = 1$:

$$\frac{\frac{1}{2}!}{1!\left(\frac{1}{2}-1\right)!}(-\epsilon^2)^1 = -\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(\frac{1}{1\left(-\frac{1}{2}\right)!}\right)\epsilon^2 = -\left(\frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{2}\right)\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{\pi}}}\right)\epsilon^2 = -\frac{1}{2}\epsilon^2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^2\,\theta \;\; d\theta =$$

sabemos que: $Sin^2\,\theta = \dfrac{1 - Cos\,2\theta}{2}$

Entonces:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^2\,\theta \;\; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - Cos\,2\theta}{2} \;\; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Cos\,2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos\,2\theta \;\, d\theta$$

Pero $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos\,2\theta \;\, d\theta = 0$

Entonces:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^2\,\theta \;\; d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto:

$$\frac{-\frac{1}{2}!}{1!\left(-\frac{1}{2} - 1\right)!}(-\epsilon^2)^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2(1)}\,\theta \;\; d\theta = \left(-\frac{1}{2}\epsilon^2\right)\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi\epsilon^2}{8}$$

Para $n = 2$:

$$\frac{\frac{1}{2}!}{2!\left(\frac{1}{2} - 2\right)!}(-\epsilon^2)^2 = -\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(\frac{1}{2\left(-\frac{3}{2}\right)!}\right)\epsilon^4 = \left(\frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{2}\right)\left(\frac{1}{2\left(-2\cancel{\sqrt{\pi}}\right)}\right)\epsilon^4 = -\frac{1}{8}\epsilon^4$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^4\,\theta \;\; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (Sin^2)^2\,\theta \;\; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - Cos\,2\theta}{2}\right)^2 \;\; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - Cos\,2\theta\,)^2}{2^2} \;\; d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - Cos\,2\theta\,)^2\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2Cos\,2\theta + Cos^2\,2\theta\,)d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos\,2\theta\, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^2\,2\theta\, d\theta\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^2\,2\theta\, d\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + Cos\,4\theta}{2} \; d\theta\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos\,4\theta \;\; d\theta\right) =$$

Pero $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \; Cos\,4\theta \;\; d\theta = 0$; entonces:

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(0)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{16}$$

Por lo tanto:

$$\frac{-\frac{1}{2}!}{2!\left(-\frac{1}{2} - 2\right)!}(-\epsilon^2)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2(2)}\,\theta \;\; d\theta = \left(-\frac{1}{8}\epsilon^4\right)\left(\frac{3\pi}{16}\right) = -\frac{3\pi\epsilon^4}{128}$$

Regresando a la suma principal, tenemos que expandiendo a términos de orden ϵ^6, obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}!}{n!\left(-\frac{1}{2} - n\right)!}(-\epsilon^2)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2n}\,\theta \;\; d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\epsilon^2}{8} - \frac{3\pi\epsilon^4}{128} - O(\epsilon^6)$$

Factorizando tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}!}{n!\left(-\frac{1}{2} - n\right)!}(-\epsilon^2)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2n}\,\theta \;\; d\theta = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{\epsilon^2}{8} - \frac{3\epsilon^4}{64} - O(\epsilon^6)\right]$$

Volviendo a nuestra ecuación original:

$$k_{alipse}^{aprox} = \frac{2^{1+2v}}{\pi^{1-v}} \left(\pi {a_1}^2 \sqrt{1-\epsilon^2}\right)^{v} \left(4a_1 E(\epsilon)\right)^{1-2v} D$$

$$= \frac{2^{1+2v}}{\pi^{1-v}} \pi^{v} {a_1}^{2v} \left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right)^{v} (4^{1-2v} {a_1}^{1-2v}) \left(\frac{\pi^{1-2v}}{2^{1-2v}}\right) \left(1 - \frac{\epsilon^2}{8} - \frac{3\epsilon^4}{64} - \frac{5\epsilon^6}{256} + O(\epsilon^8)\right)^{1-2v} D$$

Agrupando términos semejantes:

$$\left[\frac{(2^{1+2v})(4^{1-2v})}{2^{1-2v}}\right] \left[\frac{\pi^{v}(\pi^{1-2v})}{\pi^{1-v}}\right] \left[({a_1}^{\cancel{2v}})({a_1}^{1-\cancel{2v}})\right] \left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right)^{v} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{8} - \frac{3\pi\epsilon^4}{64} - O(\epsilon^6)\right)^{1-2v} D =$$

$$= \left[\left(2^{(1+\cancel{2v})+(1-\cancel{2v})}\right)\right] \left[\frac{\cancel{(\pi^{1-v})}}{\cancel{\pi^{1-v}}}\right] [a_1] \left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right)^{v} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{8} - \frac{3\epsilon^4}{64} - O(\epsilon^6)\right)^{1-2v} D =$$

$$= [(2^2)][a_1] \left(\sqrt{1-\epsilon^2}\right)^{v} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{8} - \frac{3\epsilon^4}{64} - O(\epsilon^6)\right)^{1-2v} D =$$

$$= 4a_1 D \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 - \frac{1}{8}\epsilon^4 + O(\epsilon^6)\right)^{v} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{8} - \frac{3\epsilon^4}{64} - O(\epsilon^6)\right)^{1-2v}$$

$$\boxed{k_{alipse}^{aprox} = 4a_1 D \left(1 - \frac{1}{4}\epsilon^2 - \frac{3(2v+1)}{64}\epsilon^4 + O(6')\right)}$$