Teoría Cinética Clásica de un Plasma Diluido de dos Especies, a distintas Temperaturas

Valdemar Moratto González
Asesores: Dr. Leopoldo García-Colín Scherer y Dr. Leonardo Dagdug
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
México.

30 de septiembre de 2008

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El problema de transporte de materia, momento y energía en un plasma, está íntimamente relacionado con los gradientes de temperatura, presión y velocidad combinados con los campos electromagnéticos externos, y es sin ninguna duda uno de los aspectos más cruciales en la física de plasmas. Lo que deseamos es conocer la respuesta de estos sistemas bajo determinadas circunstancias.

Imaginemos un sistema material que está en estado estacionario, que bien podría ser un estado de equilibrio termodinámico real o un cuasiestado de equilibrio en general. Si en algún momento, una *fuerza termodinámica* aparece o se le aplica al sistema, éste se ve perturbado. Dicha fuerza puede ser un campo externo, alguna inhomogeneidad espacial, algún gradiente de presión o temperatura, bajo sus efectos el sistema responderá a los estímulos aplicados, saliendo de su estado de equilibrio inicial y aparecerán flujos o corrientes de momento, energía o carga eléctrica que no están necesariamente asociados a un movimiento global de la materia.

La tendencia general de un sistema de este tipo, es regresar a su estado de equilibrio inicial (si es que éste es estable) cuando desaparecen las fuerzas. Pero si las fuerzas se mantienen, entonces se tienen constricciones externas que se oponen al regreso al equilibrio.

Según la naturaleza de las fuerzas y su nivel de acción, existe la posibilidad de que el sistema alcance un *nuevo* estado de equilibrio con algunas diferencias como flujos constantes de carga, masa, etc si es que las fuerzas son suaves y varían lento con el tiempo. Si en cambio las fuerzas cambian muy rápido con el tiempo y es muy fuerte la respuesta del sistema será bastante compleja.

Pero en cualquier caso, la aplicación de una fuerza termodinámica resulta en la aparición de una redistribución de materia y sus características, aparecerán flujos violentos, y es en esto punto donde estamos en el realismo de la *física fuera del equilibrio*, un área de conocimiento que hoy en día está en pleno desarrollo. La importancia en el estudio de la física de plasmas es enorme, por ejemplo:

El problema de la *fusión termonuclear controlada*, que se basa en la posibilidad de confinar un plasma con alguna configuración de un campo magnético por un tiempo lo suficientemente largo como para permitir las reacciones de fusión y recoger la energía que éstas reacciones producen. Pero estos contenedores magnéticos no se han logrado hacer; pero para tal fin sabemos que debemos tener un conocimiento muy profundo del procedimiento de extraer y depositar la energía.

La Astrofísica y la geofísica son otros campos de aplicación de la física de plasmas, pues por lo que sabemos el 90 % de la materia en el universo está en el estado de plasma. Aquí otra vez, el problema de transporte es crucial para poder entender una variedad de fenómenos muy complicados; por ejemplo, en el sol tenemos un abanico de circunstancias en donde los plasmas hacen exposición, así que debemos conocer profundamente la magnetohidrodinámica en esas condiciones para entender lo que ocurre en el sol. Alrededor de los planetas existe una magnetósfera que otra vez es un plasma, en donde ocurren procesos fascinantes que llaman a nuestra atención. Finalmente, aplicaciones de la vida cotidiana de la física de plasmas son por ejemplo las descargas eléctricas en los gases, arcos eléctricos etc..., donde los problemas de conductividad eléctrica y conductividad térmica son nuevamente fundamentales.

Luego de la motivación del estudio de los plasmas, aterrizamos lo que en esta tesis se pretende. La ecuación de Bolztmann para un gas donde sólo hay una especie ha sido discutido en varios textos por ejemplo [2], también se ha resuelto la ecuación de Boltzmann para una mezcla binaria de partículas diluidas con distintas cargas y masas, bajo la suposición de equilibrio local (Véase [1]) donde en particular se supone que las dos especias del plasma tienen la *misma temperatura.* El objetivo de este trabajo es validar esta suposición. Para ello, suponemos ahora que las componentes tienen diferentes temperaturas y resolvemos la ecuación de Bolztmann hasta llegar al cálculo del flujo de corriente eléctrica y luego del tiempo libre medio de colisión para cada especie y verificar que si igualamos las temperaturas de las especies no existe una diferencia significativa en los resultados generales, es decir, que la hipótesis de que las temperaturas son las mismas es, en realidad buena.

La teoría cinética clásica en plasmas describe a una colección de partículas cargadas que interactúan a través de colisiones binarias en presencia de campos magnético y eléctrico que son homogéneos y estacionarios. Para colisiones terciarias o cuárticas, es decir, para gases más densos existen efectos como ondas, vórtices o grumos, pero esta parte es tema de la llamada teoría de transporte anómala. Los efectos de inhomogeneidad del campo o de la curvatura en el espacio son estudiados por la teoría neoclásica (que no se estudia en este texto).

Capítulo 2

Definición del problema

El sistema que queremos estudiar es una mezcla binaria de partículas, diluida y eléctricamente cargada. Sus masas las etiquetamos como m_a y m_b. Cada componente del plasma tiene una temperatura diferente, digamos T_a y T_b. Con cargas e_a y e_b, donde $e_a = -e_b = e$. Los iones pueden tener carga Ze pero tomamos $Z = 1$ por simplicidad. Los números de densidad de las especies son n_a y n_b, donde $n_a + n_b = n$ tal que la densidad de masa total ρ es:

$$\rho = \rho_a + \rho_b = m_a n_a + m_b n_b. \tag{2.1}$$

Siguiendo la notación usual de la teoría cinética de gases, las funciones de distribución para cada partícula las denotamos como $f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)$ donde $\mathbf{v}_i$ es la velocidad de la partícula de especie i con $i = a, b$. Si ahora asumimos que en general en el sistema actúa un campo eléctrico $\mathbf{E}$ medido en volts/m y una inducción magnética $\mathbf{B}$ medida en teslas, la ecuación de Boltzmann para determinar la evolución temporal de la función de distribución f_i para cada especie es:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_i} \left(\mathbf{F}_i + e_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i} = \sum_{i,j=a}^{b} J(f_i f_j) \tag{2.2}$$

donde

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + e_i \mathbf{E} \qquad \text{para} \qquad i, j = a, b \tag{2.3}$$

$\mathbf{F}_i^{(e)}$ denota una fuerza externa conservativa y los campos magnético y eléctrico son $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$ respectivamente. Estos son campos autoconsistentes, es decir, generados por el propio plasma determinados por las ecuaciones de Maxwell.

El término de colisión está dado por [3]:

$$\begin{aligned} J(f_i f_j) = \int \cdots \int & \left[f(\mathbf{v}_i') f(\mathbf{v}_j') - f(\mathbf{v}_i) f(\mathbf{v}_j) \right] \\ & \times \sigma \left(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \to \mathbf{v}_i' \mathbf{v}_j' \right) g_{ij} \mathrm{d}\mathbf{v}_j \mathrm{d}\mathbf{v}_i' \mathrm{d}\mathbf{v}_j' \end{aligned} \tag{2.4}$$

En la ecuación (2.4) hemos omitido la dependencia en las funciones de distribución de $\mathbf{r}, t$. Las primas denotan los valores de v_i después de una colisión binaria y $\sigma\left(\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j \to \mathbf{v}_i'\mathbf{v}_j'\right)\mathrm{d}\mathbf{v}_i'\mathrm{d}\mathbf{v}_j'$ es la sección transversal, es decir, el número de moléculas por unidad de tiempo de especies i que chocan con moléculas de especie j tal que después de la colisión las moléculas que tienen un velocidad $\mathbf{v}_i'$ en el intervalo $\mathrm{d}\mathbf{v}_i'$ y $\mathbf{v}_j'$ van al intervalo $\mathrm{d}\mathbf{v}_j'$; $g_{ij} \equiv |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j| = |\mathbf{v}_i' - \mathbf{v}_j'|$. Para colisiones entre moléculas del mismo tipo $\mathbf{v}_i \to \mathbf{v}$ y $\mathbf{v}_j \to \mathbf{v}_1$ para distinguir ambas velocidades. Es importante hacer notar que en la ecuación (2.2) *la inducción magnética* $\mathbf{B}$ *es el promedio del campo magnético* que se encuentra a través de las ecuaciones de Maxwell, donde la densidad de corriente dependerá de las funciones de distribución f_i. De hecho, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\mathrm{prom}} + \mathbf{B}_{\mathrm{e}}$ donde $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$ es el campo externo que puede o no puede ser constante. Es importante señalar que la sección transversal σ satisface el principio de reversibilidad microscópica, es decir, es invariante ante reflexiones espaciales y temporales [2], esto es:

$$\sigma\left(\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j \to \mathbf{v}_i'\mathbf{v}_j'\right) = \sigma\left(\mathbf{v}_i'\mathbf{v}_j' \to \mathbf{v}_i\mathbf{v}_j\right) \qquad i, j = a, b \tag{2.5}$$

esto garantiza la existencia de colisiones inversas.

Como bien se sabe en teoría cinética, hay dos resultados generales que se pueden obtener de la ecuación (2.4) sin tomar en cuenta la forma especifica de la sección trasversal, esto es, sin especificar los detalles del potencial de interacción entre las partículas, a saber, las *ecuaciones de conservación* y *el teorema H.*

2.1. Ecuaciones de Conservación

Como es costumbre, definimos la densidad local de partículas:

$$n_i(\mathbf{r}, t) = \int f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)\mathrm{d}\mathbf{v}_i \tag{2.6}$$

y denotamos con $\psi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)$ cualquier variable dinámica cuyo valor local está dado por:

$$\langle\psi_i\rangle \equiv \psi_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_i}\int \psi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t) f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)\mathrm{d}\mathbf{v}_i \tag{2.7}$$

la velocidad caótica o térmica se define como

$$\mathbf{c}_i \equiv \mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t) \tag{2.8}$$

donde $\mathbf{u}$ es la velocidad baricéntrica, dada por

$$\rho\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum \rho_i \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t) \tag{2.9}$$

y

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_i}\int f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)\mathbf{v}_i\mathrm{d}\mathbf{v}_i \tag{2.10}$$

es la velocidad hidrodinámica local para la especie i. Es importante destacar en este caso que usamos $\mathbf{u}_i$ como variable local y no $\mathbf{u}$. Por lo tanto ocurre que

$$\langle \mathbf{c}_i \rangle = 0. \tag{2.11}$$

Además

$$m_a n_a \langle \mathbf{c}_a \rangle + m_b n_b \langle \mathbf{c}_b \rangle = \rho_a \mathbf{u}_a + \rho_b \mathbf{u}_b - \rho \mathbf{u} = 0 \tag{2.12}$$

Con estas expresiones el flujo de carga lo podemos escribir de una forma conveniente. De hecho, la densidad de carga numérica Q para la mezcla está definida como

$$Q = n_a e_a + n_b e_b = (n_a - n_b)e$$

y la corriente de carga para cada especie es $\mathbf{J}_{T_i} = n_i e_i \langle \mathbf{v}_i \rangle$ por lo que la corriente de carga total es:

$$\mathbf{J}_T = \sum_i n_i e_i \langle \mathbf{v}_i \rangle$$

Dicho lo anterior, obtendremos una ecuación equivalente a la ecuación de trasporte de Maxwell-Enskog, tomando $\psi_i = (m_i, m_i \mathbf{v}_i, \frac{1}{2} m_i |\mathbf{v}_i|^2)$. Notemos que de la ecuación (2.4)

$$\sum_{i,j=a}^{b} \int \psi_i J(f_i f_j) \mathrm{d}\mathbf{v}_i = 0 \tag{2.13}$$

resultado sigue de la transformación estándar [1] del kernel de colisión habiendo usado (2.5) y el hecho de que los índices i,j son mudos en (2.13).

Sea $\psi_i = m_i$. Multiplicamos m_i por (2.2) e integramos sobre $\mathrm{d}\mathbf{v}_i$ usando (2.13), se obtiene para el primer término del lado derecho

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i) = \int (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i} \mathrm{d}\mathbf{v}_i. \tag{2.14}$$

Para cualquier componente $\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i}$ el producto $(\mathbf{v}_i \times \mathbf{B})$ no contiene tal componente, entonces en la integración por partes da cero, además la masa se conserva para cada especie:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i) = 0 \tag{2.15}$$

que sumando sobre i:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{2.15a}$$

Así, las ecuaciones (2.15) son expresiones alternativas pero equivalentes de la conservación de la masa.

Ahora tomemos $\psi_i = m_i\mathbf{v}_i = m_i(\mathbf{c}_i+\mathbf{u}_i)$. Multiplicando a (2.2) e integremos en $\mathrm{d}\mathbf{v}_i$, obtenemos que el primer término es:

$$\int m_i(\mathbf{c}_i + \mathbf{u}_i)\frac{\partial f_i}{\partial t}\mathrm{d}\mathbf{v}_i = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_i\mathbf{u}_i\right]$$

y el segundo:

$$\int m_i(\mathbf{c}_i + \mathbf{u}_i)\mathbf{v}_i \cdot \nabla f_i \mathrm{d}\mathbf{v}_i = \nabla \cdot \left[m_i \int \mathbf{c}_i\mathbf{c}_i f_i \mathrm{d}\mathbf{v}_i + \rho_i\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i\right] \tag{2.16}$$

definamos la parte cinética del tensor de esfuerzos para la especie i

$$\overleftrightarrow{\tau}_i^k \equiv m_i \int f_i\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i\mathrm{d}\mathbf{v}_i \tag{2.17}$$

y la parte cinética del tensor de esfuerzos para ambas especies mediante:

$$\overleftrightarrow{\tau}^k \equiv \sum_{i=a}^{b} m_i \int f_i\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i\mathrm{d}\mathbf{v}_i = \sum_{i=a}^{b} \overleftrightarrow{\tau}_i^k \tag{2.18}$$

entonces

$$\int m_i(\mathbf{c}_i + \mathbf{u}_i)\mathbf{v}_i \cdot \nabla f_i \mathrm{d}\mathbf{v}_i = \nabla \cdot \left[\overleftrightarrow{\tau}_i^k + \rho_i\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i\right].$$

De esta manera el tercer término se lee

$$\int m_i(\mathbf{c}_i + \mathbf{u}_i)\frac{1}{m_i}\left[\mathbf{F}_i + e_i(\mathbf{v}_i \times \mathbf{B})\right] \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i}\mathrm{d}\mathbf{v}_i = -\mathbf{F}_i n_i + \int \mathbf{v}_i e_i(\mathbf{v}_i \times \mathbf{B})\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i}\mathrm{d}\mathbf{v}_i.$$

Al reunir los términos tenemos la ecuación de balance para el ímpetu para la especie i tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_i\mathbf{u}_i\right] + \nabla \cdot \left[\overleftrightarrow{\tau}_i^k + \rho_i\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i\right] \\ -\mathbf{F}_i n_i + \int \mathbf{v}_i e_i(\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i}\mathrm{d}\mathbf{v}_i = \int m_i\mathbf{v}_i J(f_i f_j)\mathrm{d}\mathbf{v}_i = 0 \end{aligned}$$

al integrar por partes tenemos que:

$$e_i \int \mathbf{v}_i(\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i}\mathrm{d}\mathbf{v}_i \quad = \quad -e_i n_i \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}$$

luego de colectar cada termino, hemos llegado a la *ecuación de balance del ímpetu para una especie*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_i\mathbf{u}_i\right] + \nabla \cdot \left[\overleftrightarrow{\tau}_i^k + \rho_i\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i\right] \\ -\mathbf{F}_i n_i - e_i n_i \mathbf{u}_i \times \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Para obtener *la ecuación de balance para ambas especies* o de la mezcla, sumamos la ecuación (2.19) sobre i, recuperando el caso de la mezcla [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \nabla\cdot(\overleftrightarrow{\tau}^k + \rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = \sum_i n_i\mathbf{F}_i + (\mathbf{J}_T\times\mathbf{B}) \tag{2.20}$$

que es la ecuación de conservación para el momento. Si las fuerzas externas son cero, i.e. $\mathbf{F}^e = 0$ y usando la definición de $\mathbf{J}_T \equiv Q\mathbf{u} + \mathbf{J}_c$ encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \nabla\cdot(\overleftrightarrow{\tau}^k + \rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = Q\big(\mathbf{E} + (\mathbf{u}\times\mathbf{B})\big) + \mathbf{J}_c\times\mathbf{B} \tag{2.21}$$

$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}$ se puedes interpretar como un campo eléctrico efectivo desde el punto de vista del observador que se mueve en la mezcla con la velocidad baricéntrica $\mathbf{u}$. Hay que subrayar que las ecuaciones (2.15) y (2.21) son ecuaciones de la magnetohidrodinámica para fluidos isotérmicos en ausencia de campos externos $\mathbf{F}^e = 0$; expresiones para mezclas de electrones e iones no isotérmicos se encuentran en [3].
Finalmente tomamos $\psi_i = \frac{1}{2}m_i|\mathbf{v}_i|^2 = \frac{1}{2}m_i v_i^2$ y repetimos el procedimiento como en el caso anterior, es decir, multiplicar la ecuación (2.2) por $\frac{1}{2}m_i v_i^2$ e integrar sobre $\mathrm{d}\mathbf{v}_i$, sin hacer la suma para obtener la ecuación de balance de energía para cada especie, veamos el primer término:

$$\int \frac{1}{2}m_i v_i^2 \frac{\partial}{\partial t} f_i \mathrm{d}\mathbf{v}_i = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_i u_i^2\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_i e_i\right)$$

tomando en cuenta los demás términos tenemos la ecuación de balance para la energía de una componente de la mezcla:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_i u_i^2\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_i e_i\right)\\
&+\frac{1}{2}m_i\int \mathbf{v}_i\cdot\frac{\partial f_i}{\partial\mathbf{r}}v_i^2\mathrm{d}\mathbf{v}_i + \frac{1}{2}\int \mathbf{F}_i\cdot v_i^2\frac{\partial f_i}{\partial\mathbf{v}_i}\mathrm{d}\mathbf{v}_i\\
&+e_i\frac{1}{2}\int(\mathbf{v}_i\times\mathbf{B})\cdot\frac{\partial f_i}{\partial\mathbf{v}_i}v_i^2\mathrm{d}\mathbf{v}_i = \frac{1}{2}m_i\int v_i^2 J(f_i f_j)\mathrm{d}\mathbf{v}_i = 0
\end{aligned}$$

Veamos el tercer término, $\frac{1}{2}m_i\int\mathbf{v}_i\cdot\frac{\partial f_i}{\partial\mathbf{r}}v_i^2\mathrm{d}\mathbf{v}_i$, con ayuda de las definiciones de $\mathbf{J}_q \equiv \sum_i \frac{1}{2}\rho_i\langle\mathbf{c}_i c_i^2\rangle = \sum\mathbf{J}_{q_i}$ y de $\overleftrightarrow{\tau}_i^k$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}m_i\int\mathbf{v}_i\cdot\frac{\partial f_i}{\partial\mathbf{r}}v_i^2\mathrm{d}\mathbf{v}_i\\
&= \nabla\cdot\left(\mathbf{J}_{q_i} + \rho_i e_i\mathbf{u}_i + \frac{1}{2}\rho_i\mathbf{u}u^2 + \overleftrightarrow{\tau}_i^k\cdot\mathbf{u}_i\right)
\end{aligned}$$

donde hemos usado la definición de la densidad de energía interna de la mezcla como:

$$\rho e(\mathbf{r},t) \equiv \sum_i \frac{1}{2}\rho_i\langle c_i^2\rangle \tag{2.22}$$

y de cada componente

$$\rho_i e_i \equiv \frac{1}{2}\rho_i \langle c_i^2 \rangle. \tag{2.22b}$$

Integrando por partes el cuarto término $\frac{1}{2}\int \mathbf{F}_i \cdot v_i^2 \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}}_i \mathrm{d}\mathbf{v}_i$, recordando que f_i tiende a cero en los infinitos:

$$\frac{1}{2}\int \mathbf{F}_i \cdot v_i^2 \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}}_i \mathrm{d}\mathbf{v}_i = -n_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_i$$

Reuniendo esta información escribimos la *ecuación de balance para la energía para una especie*:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\mathbf{J}_{q_i} + \mathbf{u}_i \cdot \overleftrightarrow{\tau}_i^k + \rho_i \mathbf{u}_i e_i + \frac{1}{2}\rho_i \mathbf{u}_i u_i^2 \right) + \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_i u_i^2\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_i e_i\right) - n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{F}_i = 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ahora si sumamos sobre i, recuperamos [1] *la ecuación de balance de energía para ambas especies*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\mathbf{J}_q + \mathbf{u} \cdot \overleftrightarrow{\tau}^k + \rho \mathbf{u} e + \frac{1}{2}\rho \mathbf{u} u^2) - \mathbf{J}_T \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{2.24}$$

Hagamos la siguiente operación: tomemos la ecuación de balance de la energía para una especie (2.23) y restemos el producto interno de $\mathbf{u}_i$ con la ecuación de balance para el momento (2.19), esto lo hacemos para tener una expresión escalar que involucre a las dos ecuaciones de conservación, tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{J}_{q_i} + \mathbf{u}_i \cdot \overleftrightarrow{\tau}_i^k + \rho_i \mathbf{u}_i e_i + \frac{1}{2}\rho_i \mathbf{u}_i u_i^2) + \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_i e_i) - n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{F}_i - \mathbf{u}_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_i \mathbf{u}_i\right] \\ -\mathbf{u}_i \cdot \nabla \cdot \left[\overleftrightarrow{\tau}_i^k + \rho_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i\right] \\ +\mathbf{u}_i \cdot n_i \mathbf{F}_i - e_i n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i \times \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

para simplificar la ecuación (2.25) se usa la ecuación (2.17) y las siguientes identidades:

$$\nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i \nabla \cdot \rho_i \mathbf{u}_i + \nabla \mathbf{u}_i \cdot \rho_i \mathbf{u}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial e_i}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial e_i}{\partial t} = \nabla e_i \cdot \mathbf{u}_i + \frac{\partial e_i}{\partial t}$$

$$\overleftrightarrow{\tau}_i^k : \nabla \mathbf{u}_i = \nabla \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \overleftrightarrow{\tau}_i^k) - \mathbf{u}_i \cdot (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\tau}_i^k) \qquad \text{[Para tensores simétricos]}$$

Luego de hacer el álgebra, se tiene *la ecuación de balance para la energía interna de una especie*:

$$\rho_i \frac{\mathrm{d}e_i}{\mathrm{d}t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{q_i} + \overleftrightarrow{\tau}_i^k : \nabla \mathbf{u} + 2n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{F}_i = 0. \tag{2.26}$$

Para recuperar la ecuación de balance para ambas especies introducimos

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Al sumar sobre i recuperamos [1]

$$\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_q + \overleftrightarrow{\tau}^k : \nabla \mathbf{u} - \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{E}' = 0 \tag{2.27}$$

Las ecuaciones (2.15a), (2.19), (2.21), (2.26) y (2.27) son las ecuaciones de conservación. *Claramente las cantidades desconocidas* $\overleftrightarrow{\tau}^k$ y $\mathbf{J}_q$ *se pueden obtener buscando soluciones para la ecuación* (2.2), cosa que se verá después.

2.2. El teorema H y el Equilibrio Local

Antes de discutir estas propiedades tan importantes de la ecuación de Boltzmann necesitamos especificar claramente el dominio en el cual es aplicable. Si no hay campo magnético, $\mathbf{B} = 0$, la ecuación (2.2) es válida en un régimen llamado *régimen cinético* caracterizado por un tiempo $t \sim \tau$, llamado tiempo libre medio, en donde $\tau >> t_c$, donde t_c es el tiempo que dura una colisión. Cuando tenemos campo magnético $\mathbf{B} \neq 0$ se tienen dos frecuencias características que compiten en la mezcla, la frecuencia de colisión $\omega_c \sim \tau^{-1}$ y las frecuencias de Larmor para cada especie $\omega_i = \frac{|e|B}{m_i}$. Para electrones $\omega_\mathrm{e} \sim 1{,}76 \times 10^{11} B$ mientras que para iones tenemos $\omega_\mathrm{i} = \omega_\mathrm{e}(m_\mathrm{e}/m_\mathrm{i})$. Si el campo es lo suficientemente débil $\omega_i \tau$ es del orden de 1 para ambos casos, esto implica que el campo no interfiere con el régimen colisional en la mezcla, por lo tanto podemos limitarnos a este caso. Cuando $\omega_i \tau >> 1$ hay que hacer modificaciones radicales a toda la aproximación del problema y eso no lo discutimos aquí (véase [3]). Una vez que hemos aclarado esto sigamos con nuestra discusión. Si multiplicamos la ecuación (2.2) por $\ln f_i$ e integramos sobre $\mathrm{d}\mathbf{v}_i$ y sumamos sobre i, el término $\int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i} \ln f_i \mathrm{d}\mathbf{v}_i$ desaparece luego de una integración por partes. Luego, usando el mismo procedimiento para el lado derecho como en el caso de una sola componente, usando (2.2) y la desigualdad de Klein se obtiene que

$$H \equiv \sum_i \int f_i \ln f_i \mathrm{d}\mathbf{v}_i \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial H(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \leq 0 \tag{2.29}$$

para todas las colisiones binarias y sus correspondientes inversas. $H \equiv H(\mathbf{r}, t)$ es función de $\mathbf{r}, t$. Entonces el criterio de irreversibilidad impuesto por (2.29) continúa siendo válido en nuestra aproximación de campo débil y otras más aún. La cantidad a la que usualmente se le asocia la producción de entropía $\sigma(\mathbf{r}, t)$ es siempre definida positiva para todas las soluciones exactas de la ecuación (2.4)

$$\sigma = -k \sum_{i,j} \int \ln f_i J(f_i f_j) \mathrm{d}\mathbf{v}_i \tag{2.30}$$

También hay que notar que la solución de la ecuación homogénea de Bolztmann implica que

$$J(f_i^{(0)} f_i^{(0)}) + J(f_i^{(0)} f_j^{(0)}) = 0 \qquad \text{para} \qquad i, j = a, b$$

donde la función $f^{(0)}$ es la función de distribución local maxwelliana. Esto surge del argumento que establece que en equilibrio $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ para cualquier colisión binaria. Pensando en una mezcla de dos especies, cada una con diferente temperatura, la ecuación de Boltzmann la podemos separar en dos partes, una para cada especie. Por los argumentos típicos de teoría cinética tenemos una función de distribución con la misma forma para cada especie en el equilibrio, separando adecuadamente las variables de cada una, (véase [3]). *La función de distribución maxwelliana para la especie i esta dada por*

$$f_i^{(0)} = n_i(\mathbf{r}, t) \left(\frac{m_i}{2\pi k T_i(\mathbf{r}, t)} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m |\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t)|^2}{2kT_i(\mathbf{r}, t)} \right) \tag{2.31}$$

debemos subrayar el hecho de que ahora $T_a \neq T_b$, luego tenemos que

$$n_i(\mathbf{r}, t) \equiv \int f_i^{(0)} \mathrm{d}\mathbf{v}_i$$

$$\rho \mathbf{u} \equiv \sum_i \rho_i \mathbf{u}_i = \sum_i \rho_i \int f_i^{(0)} \mathbf{v}_i \mathrm{d}\mathbf{v}_i$$

$$\rho_i e_i(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{3}{2} n_i k T_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \rho_i \langle c_i^2 \rangle \tag{2.32}$$

ya que *La ecuación* (2.31) *no satisface la ecuación completa de Bolztmann*, necesitamos además que

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_i} \left(\mathbf{F}_i + e_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i} \right) \ln f_i^{(0)} = 0 \tag{2.33}$$

se satisfaga para $i = a, b$. El procedimiento es como de costumbre, escribimos:

$$\ln f_i^{(0)} = \nu_i(\mathbf{r}, t) + \mathbf{k}_i(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}_i - h_i(\mathbf{r}, t) v_i^2 \tag{2.34}$$

donde

$$\nu_i(\mathbf{r}, t) = \ln \left[n_i \left(\frac{m_i \beta_i}{2\pi} \right)^{3/2} \right] - \frac{m_i \beta_i}{2} u_i^2 \qquad \text{con} \qquad \beta_i \equiv \frac{1}{kT_i}$$

$$\mathbf{k}_i(\mathbf{r},t) = \beta_i m_i \mathbf{u}_i$$
$$h_i(\mathbf{r},t) = \frac{m_i\beta_i}{2}.$$

Al sustituir (2.34) en (2.33) notando que $(\mathbf{v}_i \times \mathbf{B})\cdot\mathbf{v}_i = 0$ tenemos

$$\frac{\partial\nu_i}{\partial t} - v_i^2\mathbf{v}_i\cdot\frac{\partial h_i}{\partial\mathbf{r}} - v_i^2\frac{\partial h_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i\cdot\left(\mathbf{v}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{k}_i}{\partial\mathbf{r}}\right) +$$
$$\mathbf{v}_i\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{k}_i}{\partial t} + \frac{\partial\nu_i}{\partial\mathbf{r}} - \frac{2h_i}{m_i}F_i\right) + \mathbf{k}_i\cdot(\mathbf{v}_i\times\mathbf{B})\frac{e_i}{m_i} + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}\cdot\mathbf{k}_i = 0$$

que debe ser válido para todos los valores de $\mathbf{v}$. Los coeficientes de orden v_i^3 y v_i^2 no son dependientes de $\mathbf{B}$, entonces por procedimientos típicos $h_i = h_i(t)$ y $\mathbf{k}_i = \mathbf{r}\frac{\partial h_i}{\partial t} + \mathbf{r}\times\Omega(t) + \mathbf{k}_0(t)$. Tomando los coeficientes lineales en $\mathbf{v}_i$ tenemos

$$\frac{\partial\mathbf{k}_i}{\partial t} + \nabla\left(\nu_i + \frac{2h_ie_i}{m_i}\phi_i\right) - \frac{e_i}{m_i}\mathbf{k}_i\times\mathbf{B} = 0$$

donde ϕ_i es el potencial eléctrico. El producto de lo anterior con $\mathbf{B}$ nos lleva a

$$\mathbf{B}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{k}_i}{\partial t} + \nabla\left(\nu_i + \frac{2h_ie_i}{m_i}\phi_i\right)\right) = 0$$

para $\mathbf{B}\neq 0$. Ignorando la poca probabilidad de que $\mathbf{B}$ sea perpendicular a los términos en paréntesis,

$$\frac{\partial\mathbf{k}_i}{\partial t} + \nabla\left(\nu_i + \frac{2h_ie_i}{m_i}\phi_i\right) = 0.$$

Esto implica $\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{k}_i = 0$ ó Ω es un vector constante, entonces, para un componente de la mezcla del sistema sin fuerzas externas no patológicas:

$$f_i^{\rm eq} = n_i\left(\frac{m_i}{2\pi kT_i}\right)^{3/2}\exp\left(-\beta_i\left(\frac{m_iv_i^2}{2} + \phi_i(\mathbf{r})\right)\right) \quad \text{para} \quad i = a,b \qquad (2.35)$$

donde la energía potencial es $\phi_i = \phi_{\rm ext} + e_i\phi$. Entonces, el equilibrio se alcanza y se caracteriza por la función de distribución de Maxwell (2.34).

Capítulo 3

Solución de la Ecuación de Boltzmann

En esta sección discutiremos la solución a la ecuación de Boltzmann (2.2). Primero interpretemos el término $\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}$, tenemos que $\mathbf{v}_i$ es la velocidad de la especie i, a partir de la definición que dimos $\mathbf{v}_i = \mathbf{c}_i + \mathbf{u}_i$ y del hecho de que la energía térmica asociada con la agitación de las moléculas $\mathbf{c}_i >> \mathbf{u}$ seguimos la sugerencia de Chapman y Cowling, que nos dice que $\mathbf{u}_i \times \mathbf{B}$ lo mantengamos en el término de arrastre (izquierdo) de la ecuación de Boltzmann, y llevemos a $\mathbf{c}_i \times \mathbf{B}$ a la parte de la contribución colisional (lado derecho). Si usamos la definición de campo eléctrico efectivo $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}$ la ecuación (2.2) la escribimos:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_i}\left(\mathbf{F}_i + e_i\mathbf{E}'\right) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i} = -\frac{e_i}{m_i}(\mathbf{c}_i \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i} + \sum J(f_i f_j) \tag{3.1}$$

en esta expresión hemos separado la fuerza magnética en una parte conservativa y una que no lo es, así el lado izquierdo de la ecuación (3.1) contiene sólo fuerzas conservativas, en el caso en el que $\mathbf{B} = 0$ la solución es una extensión de la solución que se obtiene para una mezcla inerte en presencia de una fuerza conservativa [2]; lo que complica nuestro caso es el primer término en el lado derecho de la ecuación (3.1).

Como es usual, asumimos que la *aproximación de campo débil*, ésta dice que las funciones de distribución $f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i, t)$ se pueden tomar como funcionales de las variables localmente conservadas, es decir $f_i[\mathbf{r}, \mathbf{v}|n_i(\mathbf{r}, t), u_i(\mathbf{r}, t), e_i(\mathbf{r}, t)]$ y demás. Estas se pueden desarrollar en series de potencias alrededor de la función de distribución en el equilibrio $f_i^{(0)}$, ecuación (2.31):

$$f_i = f_i^{(0)}\left(1 + \epsilon\varphi_i^{(1)} + \epsilon^2\varphi_i^{(2)} + \cdots\right) \tag{3.2}$$

esta es la aproximación de Hilbert-Chapman-Enskog. El parámetro ϵ es una medida del cambio unitario de los gradientes del sistema, es decir: $\epsilon \sim |\nabla|$.

La función $f_i^{(0)}$ sigue siendo solución de la parte homogénea de la ecuación de Boltzmann en particular de (3.1) como se vio antes, pues

$$\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \mathbf{v}_i} = -f_i^{(0)} \frac{m_i}{kT_i} \mathbf{c}_i$$

y $(\mathbf{c}_i \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{c}_i = 0$. Al sustituir la ecuación (3.2) en (3.1) y quedándonos con los términos de orden ϵ tenemos que en la parte izquierda basta tomar a $f_i^{(0)}$ pues $\frac{D}{Dt} f_i^{(0)} \sim \epsilon$, para la especie a (para la especie b tenemos una expresión idéntica):

$$\frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_a} \left(\mathbf{F}_a + e_a \mathbf{E}' \right) \cdot \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial \mathbf{v}_a} \tag{3.3}$$

$$= -\frac{e_a}{m_a} (\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} (f_a^{(0)} \varphi_a^{(1)}) + f_a^{(0)} \left[C(\varphi_a^{(1)}) + C(\varphi_a^{(1)} + \varphi_b^{(1)}) \right]$$

en donde

$$C(\varphi_a^{(1)}) \equiv \int \int \int \mathrm{d}\mathbf{v}_a' \mathrm{d}\mathbf{v}_a \mathrm{d}\mathbf{v}_b \sigma |g_{ab}| \Delta(\varphi_a^{(1)})$$

y

$$\Delta(\varphi_a^{(1)}) \equiv \varphi_b'^{(1)} + \varphi_a'^{(1)} - \varphi_b^{(1)} - \varphi_a^{(1)}$$

las funciones $C(\varphi_a^{(1)})$ y $C(\varphi_a^{(1)} + \varphi_b^{(1)})$ son los kernels de colisión linealizados para colisiones entre partículas de especies a y b respectivamente [4]. Evaluemos el lado izquierdo de la ecuación (3.3) a partir de nuestra suposición funcional, que nos dice:

$$\frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial n_a} \frac{\partial n_a}{\partial t} + \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial \mathbf{u}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial T_a} \frac{\partial T_a}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial n_a} \frac{\partial n_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial \mathbf{u}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial T_a} \frac{\partial T_a}{\partial \mathbf{r}}$$

$$\frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial n_a} \frac{\partial n_a}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial \mathbf{u}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial T_a} \frac{\partial T_a}{\partial \mathbf{v}}$$

donde la temperatura local $T_a(\mathbf{r}, t)$ para la especie a la introducimos como es de costumbre a través de la ecuación

$$\rho_a e_a(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{3}{2} n_a k T_a, \tag{3.4}$$

y los mismo para T_b. Utilizando la forma explícita de $f_a^{(0)}$ obtenemos las condiciones subsidiarias

$$\frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial n_a} = \frac{f_a^{(0)}}{n_a}, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial \mathbf{u}_a} = \frac{m_a}{kT_a} \mathbf{c}_a f_a^{(0)},$$

$$\frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial T_a} = \frac{f_a^{(0)}}{T_a}\left(\frac{m_a c_a^2}{2kT_a} - \frac{3}{2}\right)$$

Finalmente, de la ecuación (2.15) tenemos

$$\left(\frac{\partial n_a}{\partial t}\right)_0 = -\nabla(n_a \mathbf{u}_a) \tag{3.6}$$

el subíndice 0 es para enfatizar que estamos en el orden más bajo (primer orden) respecto a los gradientes. De la ecuación (2.19) tomando en cuenta que $\overleftrightarrow{\tau}_a^k = p\mathbb{I}$, obtenemos:

$$\rho_a \left(\frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial t}\right)_0 = -\rho_a \mathbf{u}_a \cdot \nabla \mathbf{u}_a - \nabla p + n_a \mathbf{F}_a + e_a n_a \mathbf{u}_a \times \mathbf{B} \tag{3.7}$$

donde hemos usado la identidad $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a) = (\nabla \cdot \rho \mathbf{u}_a)\mathbf{u}_a + \rho \mathbf{u}_a \cdot \nabla \mathbf{u}_a$. Por otra parte tenemos que

$$\rho_a \frac{\mathrm{d}e_a}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2} n_a k \frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}t}$$

donde

$$\frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}t} = \nabla T_a \cdot \mathbf{u}_a + \frac{\partial T_a}{\partial t}$$

de la ecuación (2.26) teniendo en consideración que $\mathbf{u} \sim \epsilon$ y $\mathbf{J}_{q_a} \sim \epsilon$ tenemos:

$$\rho_a \frac{\mathrm{d}e_a}{\mathrm{d}t} = -p_a(\nabla \cdot \mathbf{u}_a)$$

mezclando estas tres ecuaciones tenemos que

$$\left(\frac{\partial T_a}{\partial t}\right)_0 = -\left(\nabla T_a \cdot \mathbf{u}_a + \frac{2p_a}{3n_a k}\nabla \cdot \mathbf{u}_a\right) \tag{3.8}$$

Ahora, recopilando la información y haciendo uso de la hipótesis funcional hacemos el lado izquierdo de la ecuación (3.3)

$$\frac{D}{Dt} f_a^{(0)} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial n_a}\frac{\partial n_a}{\partial t} + \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial T_a}\frac{\partial T_a}{\partial t} \\ +\mathbf{v}_a \cdot \left(\frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial n_a}\frac{\partial n_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial T_a}\frac{\partial T_a}{\partial \mathbf{r}}\right) \\ +\frac{1}{m_a}(\mathbf{F}_a + e_a \mathbf{E}') \cdot \left(\frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial n_a}\frac{\partial n_a}{\partial \mathbf{v}_a} + \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}_a} + \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial T_a}\frac{\partial T_a}{\partial \mathbf{v}_a}\right) \end{array} \right\}$$

cada uno de estos términos ya los hemos preparado en renglones anteriores, hacer el álgebra no representa mayor problema que escribir mucho, así que omitimos el proceso ya que no contiene argumentos de interés, salvo la redefinición que es:

$$n_{a0} \equiv \frac{n_a}{n}$$

de esta forma escribimos la expresión anterior de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & f_a^{(0)} \left\{ \frac{n_a}{n}\mathbf{c}_a \cdot \mathbf{d}_{ab} + \frac{m_a}{kT_a}\overset{\circ}{\overleftrightarrow{\mathbf{c}_a\mathbf{c}_a}} : \nabla \mathbf{u}_a + \left(\frac{m_a c_a^2}{2kT_a} - \frac{5}{2}\right)\mathbf{c}_a \cdot \nabla \ln T_a \right\} \\ & = f_a^{(0)} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{e_a}{m_a}(\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \varphi_a^{(1)}}{\partial \mathbf{v}_a} + [C(\varphi_a^{(1)}) + C(\varphi_a^{(1)} + \varphi_b^{(1)})] \\ -\frac{n_a e_a}{p_a}[\mathbf{c}_a \cdot (\mathbf{u}_a \times \mathbf{B})] \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde d_{ab} es la fuerza de difusión y la hemos escrito en términos de las fuerzas externas y los gradientes del sistema, pero no ∇T_a pues este induce en el sistema sus correspondientes corrientes. En particular el término $\mathbf{E}$ que está dentro de $\mathbf{E}'$ es el responsable de todos los efectos eléctricos en la mezcla.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{ab} = -\mathbf{b}_{ba} \equiv \nabla \frac{n_a}{n} + \frac{n_a n_b (m_b - m_a)}{n\rho} \frac{\nabla p}{p} \\ -\frac{\rho_a \rho_b}{p\rho} \left(\frac{\mathbf{F}_a}{m_a} - \frac{\mathbf{F}_b}{m_b} \right) - \frac{n_a n_b}{p\rho} (m_b e_a - m_a e_b) \cdot \mathbf{E}' \end{aligned} \tag{3.10}$$

Construyamos la solución de (3.9) a través del método usual. Recordemos que en el caso homogéneo la solución no es única, tenemos cinco, es decir los invariantes colisionales $(m_i, m_i\mathbf{c}_i, \frac{1}{2}m_i c_i^2)$, *en este caso tenemos soluciones compuestas por una solución del término inhomogéneo más una combinación lineal arbitraria de las soluciones del término homogéneo de la ecuación.* Los coeficientes que aparecen se determinan a través de las condiciones subsidiarias:

$$\sum_i \int f_i^{(0)} \varphi_i^{(n)} \left\{ \begin{array}{c} m_i \\ m_i \mathbf{c}_i \\ \frac{1}{2} m_i c_i^2 \end{array} \right\} d\mathbf{c}_i = 0 \qquad n \geq 1 \tag{3.11}$$

esto debido a que hemos escogido determinar las variables locales a través de $f_i^{(0)}$. Este argumento no pierde validez en (3.9) pero ahora nos damos cuenta que la ecuación homogénea sólo tiene m_a y $\frac{1}{2}m_a c_a^2$ como soluciones particulares pues términos en el lado derecho no se anulan con $m_a\mathbf{c}_a$. Subrayemos que $\frac{\partial \varphi_a}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \mathbf{c}_a}$ porque $\mathbf{u}$ es constante en el espacio de $\mathbf{v}$ entonces:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(1)} = \overleftrightarrow{\mathbb{B}_i}(\mathbf{c}_i, T, B \cdots) : \nabla \mathbf{u}_i + \overrightarrow{\mathbb{A}_i}(\mathbf{c}_i, T, B \cdots) \cdot \nabla \ln T_i \\ + \overrightarrow{\mathbb{D}_i}(\mathbf{c}_i, T, B \cdots) \cdot \mathbf{d}_{ij} + \alpha_1 + \alpha_2 m_i c_i^2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde queda por determinar $\overleftrightarrow{\mathbb{B}}$, $\overrightarrow{\mathbb{A}_i}$ y $\overrightarrow{\mathbb{D}_i}$. Estos coeficientes están construidos con los vectores $\mathbf{c}_i$ y $\mathbf{B}$, vemos que al sustituir (3.12) en la primera condición de (3.11) las integrales son impares en $\mathbf{c}_i$ y se anulan, luego las contribuciones de $\alpha_1 + \alpha_2 m_i c_i^2$ se anulan tal y como en el caso no magnético, se tiene $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Véase [5], entonces,

$$\varphi_i^{(1)} = \overleftrightarrow{\mathbb{B}_i} : \nabla \mathbf{u}_i + \overrightarrow{\mathbb{A}_i} \cdot \nabla \ln T_i + \overrightarrow{\mathbb{D}_i} \cdot \mathbf{d}_{ij} \tag{3.13}$$

Es la solución más general para (3.9), donde los coeficientes son algún tensor en general $\overleftrightarrow{\mathbb{B}}$ y los vectores $\overrightarrow{\mathbb{A}_i}$, $\overrightarrow{\mathbb{D}_i}$ que se puedan construir con la base disponible $\mathbf{c}_i$ y $\mathbf{B}$, usemos los vectores ortogonales:

$$\mathbf{c}_i \quad , \quad \mathbf{c}_i \times \mathbf{B} \quad \text{y} \quad (\mathbf{c}_i \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \tag{3.14}$$

pues $[(\mathbf{c}_i \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} = -B^2 \mathbf{c}_i \times \mathbf{B}$.

El término $\overleftrightarrow{\mathbb{B}} : \nabla \mathbf{u}_i$ donde $\overleftrightarrow{\mathbb{B}}$ es el tensor más general construido con los vectores (3.14) aporta los efectos viscomagnéticos que ignoraremos por ahora en nuestra discusión. El término $\overleftrightarrow{\mathbb{B}_i} : \nabla \mathbf{u}_i$ por la simetría se anula al integrar, así que lo omitimos. Para los términos que nos quedan, definamos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbb{A}_i} &= \mathbb{A}_{\mathbb{I}}(c_i, B, \cdots) + \mathbb{A}_{\mathbb{II}}(c_i, B, \cdots)\mathbf{c}_i \times \mathbf{B} + \mathbb{A}_{\mathbb{III}}(c_i, B, \cdots)(\mathbf{c}_i \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (3.15)\\
\overrightarrow{\mathbb{D}_i} &= \mathbb{D}_{\mathbb{I}}(c_i, B, \cdots) + \mathbb{D}_{\mathbb{II}}(c_i, B, \cdots)\mathbf{c}_i \times \mathbf{B} + \mathbb{D}_{\mathbb{III}}(c_i, B, \cdots)(\mathbf{c}_i \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}
\end{aligned}$$

para $i = a, b$. Las cantidades $\mathbb{A}_{\mathbb{I}}, \mathbb{D}_{\mathbb{I}}, \cdots$ etc son funciones de todos los escalares que se pueden formar con estos vectores, i.e. $c_i = |\mathbf{c}_i|$, $B_i = |\mathbf{B}_i|$, $T_i(\mathbf{r}_i, t), \cdots$ etc. A partir de ahora omitiremos por comodidad los argumentos.

Notemos que este caso es más complicado que aquel donde $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, también que cuando sustituimos las ecuaciones (3.15) en (3.13) y lo escribimos en términos de $\mathbf{J}_q$ obtenemos los efectos de conducción de calor más los efectos electromagnéticos provenientes de $\mathbf{E}'$, más efectos como Dufour y Soret y otros.
Continuando con nuestra solución, sustituyamos la ecuación (3.13) en la (3.9) igualando coeficientes de $\nabla \ln T_i$ y $\mathbf{d}_{ab}$ respectivamente, esto nos conduce a dos ecuaciones integrales para las funciones vectoriales $\overrightarrow{\mathbb{A}_i}$ y $\overrightarrow{\mathbb{D}_i}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
f_a^{(0)}\left(\frac{m_a c_a^2}{2kT_i} - \frac{5}{2}\right)\mathbf{c}_a &= -f_a^{(0)}\frac{e_a}{m_a}(\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbb{A}_a}}{\partial \mathbf{c}_a} \qquad (3.16)\\
&+ f_a^{(0)}\left[C(\overrightarrow{\mathbb{A}_a}) + C(\overrightarrow{\mathbb{A}_a} + \overrightarrow{\mathbb{A}_b})\right]\\
&- f_a^{(0)}\frac{e_a}{p_a}\mathbf{c}_a \cdot \int \mathbf{c}_a f_a^{(0)} \overrightarrow{\mathbb{A}_a} \mathrm{d}\mathbf{v}_a \times \mathbf{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_a^{(0)}\frac{n_a}{n}\mathbf{c}_a &= -f_a^{(0)}\frac{e_a}{m_a}(\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\mathbb{D}_a}}{\partial \mathbf{c}_a}\\
&+ f_a^{(0)}\left[C(\overrightarrow{\mathbb{D}_a}) + C(\overrightarrow{\mathbb{D}_a} + \overrightarrow{\mathbb{D}_b})\right]\\
&- f_a^{(0)}\frac{e_a}{p_a}\mathbf{c}_a \cdot \int \mathbf{c}_a f_a^{(0)} \overrightarrow{\mathbb{D}_a} \mathrm{d}\mathbf{v}_a \times \mathbf{B}
\end{aligned}$$

hay otras dos expresiones idénticas para la especie b. Los vectores $\overrightarrow{\mathbb{A}_a}$ y $\overrightarrow{\mathbb{D}_a}$ los encontramos en las ecuaciones (3.15) así que aún hay manipulaciones algebraicas implícitas en estas ecuaciones. La ecuaciones para las especies a y

b son idénticas, así que sólo nos concentraremos en una. Hay que notar que $(\mathbf{c}_j \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{c}_j \cdot \mathbf{B}) - B^2 \mathbf{c}_j$ con esto podemos reescribir la ecuación (3.15) así:

$$\overrightarrow{\mathbb{A}_a} = \left(\mathbb{A}_a^{(1)} - B^2 \mathbb{A}_a^{(3)}\right) \mathbf{c}_a + (\mathbf{c}_a \times \mathbf{B})\mathbb{A}_a^{(2)} + \mathbf{B}\left(\mathbf{c}_a \cdot \mathbf{B}\right) \mathbb{A}_a^{(3)}$$

donde $\mathbb{A}_a^{(1)} \equiv \mathbb{A}_{\mathbb{I}}$, etc. y $\mathbb{A}_a^{(1)}$, $\mathbb{A}_a^{(2)}$, $\mathbb{A}_a^{(3)}$ son funciones escalares de $|\mathbf{c}_i|$, $|\mathbf{B}|$ y $|\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{B}|$, veamos que $\mathbb{A}_a^{(1)} - B^2 \mathbb{A}_a^{(3)}$ es un coeficiente que es función de los escalares B^2, etc. entonces simplemente lo renombramos como $\mathbb{A}_a^{(1)}$. Entonces

$$\overrightarrow{\mathbb{A}_a} = \mathbb{A}_a^{(1)} \mathbf{c}_a + (\mathbf{c}_a \times \mathbf{B})\mathbb{A}_a^{(2)} + \mathbf{B}\left(\mathbf{c}_a \cdot \mathbf{B}\right) \mathbb{A}_a^{(3)}$$

Ahora sustituimos esta ecuación en (3.16), omitiendo pasos tediosos. Usaremos las siguientes identidades, véase el apéndice A de la referencia [1]:

$$-f_a^{(0)} \frac{e_a}{m_a} (\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \frac{\partial \overrightarrow{\mathbb{A}}_a}{\partial \mathbf{c}_a} = \tag{3.17}$$
$$-f_a^{(0)} \frac{e_a}{m_a} \left((\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \mathbb{A}_a^{(1)} - \left[B^2 \mathbf{c}_a - \mathbf{B}(\mathbf{c}_a \cdot \mathbf{B}) \mathbb{A}_a^{(2)} \right] \right)$$

y

$$-\mathbf{c}_a \cdot e_a \int \mathrm{d}\mathbf{c}_a f_a^0 \overrightarrow{\mathbb{A}}_a \mathbf{c}_a \times \mathbf{B} =$$
$$(\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \mathbb{G}_B^{(1)} - \left[B^2 \mathbf{c}_a - \mathbf{B}(\mathbf{c}_a \cdot \mathbf{B}) \mathbb{G}_B^{(2)} \right]$$

donde

$$\mathbb{G}_B^{(1)} \equiv \frac{1}{2} e_a \int \mathrm{d}\mathbf{c}_a f_a^0 \mathbb{A}_a^{(1)} \left[\mathbf{c}_a^2 - \frac{1}{B^2} (\mathbf{c}_a \cdot \mathbf{B})^2 \right]$$

y

$$\mathbb{G}_B^{(2)} \equiv \frac{1}{2} e_a \int \mathrm{d}\mathbf{c}_a f_a^0 \mathbb{A}_a^{(2)} \left[\mathbf{c}_a^2 - \frac{1}{B^2} (\mathbf{c}_a \cdot \mathbf{B})^2 \right]$$

hay que recordar que existe una expresión idéntica para la especie b, tenemos:

$$f_a^{(0)} \left(\frac{m_a c_a^2}{2kT_i} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{c}_a = \tag{3.18}$$

$$
\begin{array}{c}
-f_a^{(0)} \frac{e_a}{m_a} \left((\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \mathbb{A}_a^{(1)} - \left[B^2 \mathbf{c}_a - \mathbf{B}(\mathbf{c}_a \cdot \mathbf{B}) \mathbb{A}_a^{(2)} \right] \right) \\
+f_a^{(0)} \frac{1}{p_a} \left((\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \mathbb{G}_B^{(1)} - \left[B^2 \mathbf{c}_a - \mathbf{B}(\mathbf{c}_a \cdot \mathbf{B}) \mathbb{G}_B^{(2)} \right] \right)
\end{array}
$$

$$
+f_a^{(0)} \left\{ \begin{array}{c}
\left[C(\mathbf{c}_a \mathbb{A}_a^{(1)}) + C(\mathbf{c}_a \mathbb{A}_a^{(1)} + \mathbf{c}_b \mathbb{A}_b^{(1)}) \right] \\
+ \left[C\left((\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \mathbb{A}_a^{(2)} \right) + C\left((\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \mathbb{A}_a^{(2)} + (\mathbf{c}_b \times \mathbf{B}) \mathbb{A}_b^{(2)} \right) \right] \\
+ \left[C(\mathbf{c}_a \mathbb{A}_a^{(3)}) + C(\mathbf{c}_a \mathbb{A}_a^{(3)} + \mathbf{c}_b \mathbb{A}_b^{(3)}) \right] \cdot \mathbf{BB}
\end{array} \right\}
$$

Las ecuaciones correspondientes a $\mathbb{D}_a^{(i)}$ y $\mathbb{D}_b^{(i)}$ tienen la misma estructura salvo el término inhomogéneo en la ecuación (3.16b).

Para simplificar las cosas, luego de haber introducido los vectores base $\mathbf{c}_a$, $\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}$ y $(\mathbf{c}_a \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}$, separemos la expresión anterior en tres independientes, una asociada a cada uno de estos vectores, tenemos:

$$
\begin{aligned}
f_a^{(0)} \left(\frac{m_a c_a^2}{2kT_i} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{c}_a = f_a^{(0)} \frac{e_a B^2}{m_a} \mathbb{A}_a^{(2)} \mathbf{c}_a - f_a^{(0)} \frac{B^2}{p_a} \mathbb{G}_B^{(2)} \mathbf{c}_a \\
+f_a^{(0)} \left[C(\mathbf{c}_a \mathbb{A}_a^{(1)}) + C(\mathbf{c}_a \mathbb{A}_a^{(1)} + \mathbf{c}_b \mathbb{A}_b^{(1)}) \right]
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = -f_a^{(0)} \frac{e_a}{m_a} (\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \mathbb{A}_a^{(1)} + f_a^{(0)} \frac{1}{p_a} (\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \mathbb{G}_B^{(1)} \\
+f_a^{(0)} \left[C\left((\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \mathbb{A}_a^{(2)} \right) + C\left((\mathbf{c}_a \times \mathbf{B}) \mathbb{A}_a^{(2)} + (\mathbf{c}_b \times \mathbf{B}) \mathbb{A}_b^{(2)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.19b}
$$

que es lo mismo que en [1], salvo por $f_i^{(0)}$ y el término inhomogeneo; ahora, factorizando $\mathbf{BB}$

$$
\begin{aligned}
0 = -f_a^{(0)} \frac{e_a}{m_a} \mathbf{B}(\mathbf{c}_a \cdot \mathbf{B}) \mathbb{A}_a^{(2)} + f_a^{(0)} \frac{1}{p_a} \mathbf{B}(\mathbf{c}_a \cdot \mathbf{B}) \mathbb{G}_B^{(2)} \\
+f_a^{(0)} \left[C\left(\mathbf{c}_a \mathbb{A}_a^{(3)} \right) + C\left(\mathbf{c}_a \mathbb{A}_a^{(3)} + \mathbf{c}_b \mathbb{A}_b^{(3)} \right) \right] \cdot \mathbf{BB}
\end{aligned} \tag{3.19c}
$$

Tenemos tres ecuaciones lineales, acopladas para las tres funciones $\mathbb{A}_a^{(i)}$ que caracterizan a $\varphi_a^{(0)}$. Notemos que tenemos ecuaciones iguales (salvo el término inhomogéneo) para los coeficientes $\mathbb{D}_a^{(i)}$. Ahora simplifiquemos la eq. (3.19a) factorizando $\times\mathbf{B}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
0 = -f_a^{(0)} \frac{e_a}{m_a} \mathbf{c}_a \mathbb{A}_a^{(1)} + f_a^{(0)} \frac{1}{p_a} \mathbf{c}_a \mathbb{G}_B^{(1)} \\
+f_a^{(0)} \left[C\left(\mathbf{c}_a \mathbb{A}_a^{(2)} \right) + C\left(\mathbf{c}_a \mathbb{A}_a^{(2)} + \mathbf{c}_b \mathbb{A}_b^{(2)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.19b'}
$$

Podemos reducir el sistema de tres ecuaciones a sólo dos, con el siguiente truco: multipliquemos la ecuación (3.19c) por B^2 y se la sumamos a (3.19), tenemos

$$f_a^{(0)}\left(\frac{m_a c_a^2}{2kT_i}-\frac{5}{2}\right)\mathbf{c}_a = f_a^{(0)}\left[C(\mathbf{c}_a R_a)+C(\mathbf{c}_a R_a+\mathbf{c}_b R_b)\right] \tag{3.20}$$

donde $R_a = \mathbb{A}_a^{(1)} + B^2\mathbb{A}_a^{(3)}$. Esta función es identica a la obtenida en [1] y más aún, en mezclas ordinarias, así que la forma de R_i $(i=a,b)$ ya la conocemos. Por otro lado si multiplicamos (3.19b) por iB y le sumamos (3.19a) obtenemos:

$$f_a^{(0)}\left(\frac{m_a c_a^2}{2kT_i}-\frac{5}{2}\right)\mathbf{c}_a = f_a^{(0)}\frac{1}{p_a}(iB)\mathbf{c}_a G - f_a^{(0)}\frac{e_a}{m_a}\mathbf{c}_a(iB)\mathbb{A}_a$$

$$+f_a^{(0)}\left[C(\mathbf{c}_a R_a)+C(\mathbf{c}_a R_a+\mathbf{c}_b R_b)\right] \tag{3.20b}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_i &\equiv \mathbb{A}_i^{(1)} + iB\mathbb{A}_i^{(2)} \\ G &\equiv \mathbb{G}_B^{(1)} + iB\mathbb{G}_B^{(2)}\end{aligned} \tag{3.21}$$

haciendo lo propio para los coeficientes $\mathbb{D}$ tenemos

$$f_a^{(0)}\frac{n_a}{n}\mathbf{c}_a = \tag{3.22}$$
$$f_a^{(0)}\left[C\left(\mathbf{c}_a(\mathbb{D}_a^{(1)}+B^2\mathbb{D}_a^{(3)})\right)+C\left(\mathbf{c}_a(\mathbb{D}_a^{(1)}+B^2\mathbb{D}_a^{(3)})+\mathbf{c}_b(\mathbb{D}_b^{(1)}+B^2\mathbb{D}_b^{(3)})\right)\right]$$

y

$$f_a^{(0)}\frac{n_a}{n}\mathbf{c}_a = f_a^{(0)}\frac{1}{p_a}(iB)\mathbf{c}_a K - f_a^{(0)}\frac{e_a}{m_a}\mathbf{c}_a(iB)\mathbb{D}_a + f_a^{(0)}\left[C(\mathbf{c}_a\mathbb{D}_a)+C(\mathbf{c}_a\mathbb{D}_a+\mathbf{c}_b\mathbb{D}_b)\right] \tag{3.22b}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_i &\equiv \mathbb{D}_i^{(1)} + iB\mathbb{D}_i^{(2)} \\ K &\equiv \mathbb{K}_B^{(1)} + iB\mathbb{K}_B^{(2)}\end{aligned} \tag{3.23}$$

además de

$$\mathbb{K}_B^{(1)} = \frac{1}{2}e_a\int d\mathbf{c}_a f_a^0 \mathbb{D}_a^{(1)}\left[\mathbf{c}_a^2 - \frac{1}{B^2}(\mathbf{c}_a\cdot\mathbf{B})^2\right] \tag{3.24}$$

y

$$\mathbb{K}_B^{(2)} = \frac{1}{2} e_a \int \mathrm{d}\mathbf{c}_a f_a^0 \mathbb{D}_a^{(2)} \left[\mathbf{c}_a^2 - \frac{1}{B^2} (\mathbf{c}_a \cdot \mathbf{B})^2 \right] \tag{3.24b}$$

Las ecuaciones de la forma (3.20b) y (3.22b) son de una forma nueva en teoría cinética, pero ya han sido resueltas por García-Colín y Dagdug L.[1], reescribimos el método por darle integridad al texto. Primero veamos las restricciones impuestas en $\varphi_i^{(1)}$ por las condiciones subsidiarias, que son las ecuaciones (3.11). Sustituimos (3.13) en (3.11), omitimos el término $\nabla \mathbf{u}_i$ por hipótesis de equilibrio local:

$$\sum_i m_i \int f_i^{(0)} \overrightarrow{\mathbb{A}}_i \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{c}_i \\ \frac{1}{2} c_i^2 \end{array} \right\} \mathrm{d}\mathbf{c}_i \cdot \nabla \ln T_i + \sum_i m_i \int f_i^{(0)} \overrightarrow{\mathbb{D}}_i \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{c}_i \\ \frac{1}{2} c_i^2 \end{array} \right\} \mathrm{d}\mathbf{c}_i \cdot \overrightarrow{d}_{ij} = 0$$

Ambos términos son bastante similares, fijemos nuestra atención en el primero. Utilizando la expresión para $\overrightarrow{\mathbb{A}}_i$ las integrales que no se anulan son

$$\begin{aligned} &\sum_i m_i \int f_i^{(0)} \mathbb{A}_i^{(1)} \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i \mathrm{d}\mathbf{c}_i \cdot \nabla \ln T_i \\ &+ \sum_i m_i \int f_i^{(0)} \mathbb{A}_i^{(2)} \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i \mathrm{d}\mathbf{c}_i \cdot (\mathbf{B} \times \nabla \ln T_i) \\ &+ \sum_i m_i \int f_i^{(0)} \mathbb{A}_i^{(3)} \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i \mathrm{d}\mathbf{c}_i \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \nabla \ln T_i) = 0 \end{aligned}$$

como $\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i = \overset{\circ}{\overleftrightarrow{\mathbf{c}_a \mathbf{c}_a}} + \frac{1}{3} c_i^2 \mathbb{I}$ y notando que todas las integrales donde hay una matriz sin traza por su simetría se anulan, tenemos tres condiciones:

$$\sum_i m_i \int f_i^{(0)} \mathbb{A}_i^{(1)} c_i^2 \mathrm{d}\mathbf{c}_i \cdot \nabla \ln T_i = 0$$

$$\sum_i m_i \int f_i^{(0)} \mathbb{A}_i^{(2)} c_i^2 \mathrm{d}\mathbf{c}_i \mathbb{I} \cdot (\mathbf{B} \times \nabla \ln T_i) = 0$$

$$\sum_i m_i \int f_i^{(0)} \mathbb{A}_i^{(3)} c_i^2 \mathrm{d}\mathbf{c}_i B^2 \nabla \ln T_i = 0$$

Hagamos la suposición de que $\mathbf{B} = B\hat{k}$; en este caso $\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \nabla T_i) = B^2 \nabla T_i$, entonces para $R_i = \mathbb{A}_i^{(1)} + B^2 \mathbb{A}_i^{(3)}$ y $\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_i^{(1)} + iB\mathbb{A}_i^{(2)}$ obtenemos las siguientes condiciones subsidiarias

$$\sum_i m_i \int f_i^{(0)} R_i c_i^2 \mathrm{d}\mathbf{c}_i = 0 \tag{3.25}$$
$$\sum_i m_i \int f_i^{(0)} \mathbb{A}_i c_i^2 \mathrm{d}\mathbf{c}_i = 0$$

y relaciones similares para las funciones de $\mathbb{D}_i^{(j)}$, es importante hacer notar que estas ecuaciones son válidas cuando $\mathbf{B} = B\hat{k}$, tal que $\mathbf{B}(\mathbf{B}\cdot\nabla T_i) = B^2 \frac{\partial T_i}{\partial z}\hat{k}$

El siguiente paso en este método es proponer un desarrollo conveniente de las funciones desconocidas en términos de un conjunto completo de funciones ortonormales. Para tal fin, elegimos aquellas familiares en teoría cinética, los polinomios de Sonine (Laguerre) $S_m^{(p)}$. Brevemente:

$$S_m^{(p)} = \sum_{r=0}^{p} \frac{(-x)^r (m+p)_{p-r}}{r!(p-r)!}$$

donde

$$(m+p)_q = \prod_{s=0}^{q} (m+p+s)$$

veamos los primeros términos:

$$S_m^{(0)}(x) = 1$$
$$S_m^{(1)}(x) = -x + m + 1$$
$$S_m^{(2)}(x) = \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - (m+2)x + \frac{x^2}{2!}$$

y

$$\int_0^\infty e^{-x^2} S_m^p(x) S_m^q(x) x^{2m+1} \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(m+p+1)}{2p!}\delta_{pq} \tag{3.26}$$

Estas son unas pocas propiedades de esos polinomios. Ahora proponemos lo siguiente para las especies a, b:

$$\mathbb{A}_j^{(i)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(a_j^{(i)}\right)^{(m)} S_{\frac{3}{2}}^{(m)} c_j^2 \tag{3.27}$$

$$j = a, b$$
$$i = 1, 2, 3$$

donde los coeficientes $\left(a_j^{(i)}\right)^{(m)}$ son funciones de los escalares B^2, n_i, T_i, etc. Debemos recordar que tenemos una expresión similar para $\mathbb{D}_j^{(i)}$. En este caso, las funciones introducidas en las ecuaciones (3.21) y (3.23): $\mathbb{A}_i$ y $\mathbb{D}_i$ son de un nuevo tipo, y las escribimos:

$$\mathbb{A}_j^{(i)} = \mathbb{A}_j^{(1)} + iB\mathbb{A}_j^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_j^{(m)} S_{\frac{3}{2}}^{(m)} c_j^2 \tag{3.28}$$

con

$$\alpha_j^{(m)} = \left(a_j^{(1)}\right)^{(m)} + iB\left(a_j^{(2)}\right)^{(m)}$$

y objetos similares para $\mathbb{D}_i$ y $d_j^{(m)}$ respectivamente.
Las ecuaciones (3.27) y (3.28) son muy útiles para reducir la estructura de las ecuaciones integrales (3.20b) y (3.22b) así como las condiciones subsidiarias (3.25). De hecho, introduciendo la velocidad adimensional

$$\overrightarrow{\omega}_i = \sqrt{\frac{m_i}{2kT_i}}\mathbf{c}_i = \sqrt{\frac{\rho_i}{2p_i}}\mathbf{c}_i \tag{3.29}$$

notando que $f_i^{(0)} = n_i \left(\frac{m_i}{2\pi kT_i}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\omega_i^2}$ y usando la condición de ortogonalidad para los polinomios de Sonine (3.26) encontramos que (3.25) se reduce a

$$\sum_{i=a}^{b} n_i \left(a_{(i)}^{(1)(0)} + B^2 a_i^{(3)(0)}\right) = 0 \tag{3.30}$$

$$\sum_{i=a}^{b} n_i a_i^{(0)} = 0 \tag{3.30b}$$

implicando que todos los coeficientes $a_{(i)}^{(m)}$ para $m > 0$ no están restringidos. Por el mismo argumento se tiene:

$$G_B^{(1)} = \sum_j \frac{e_j n_j}{m_j} kT_j a_{(j)}^{(1)(0)} = \sum_j \frac{e_j \rho_j}{m_j} a_{(j)}^{(1)(0)} \tag{3.31}$$

y

$$G_B^{(2)} = \sum_j \frac{e_j n_j}{m_j} kT_j a_{(j)}^{(2)(0)} = \sum_j \frac{e_j \rho_j}{m_j} a_{(j)}^{(2)(0)}$$

usando la ecuación (3.28):

$$G = \sum_j \frac{e_j n_j}{m_j} kT_j a_{(j)}^{(0)} = \sum_j \frac{e_j \rho_j}{m_j} a_{(j)}^{(0)} \tag{3.32}$$

análogamente:

$$K = \sum_j \frac{e_j n_j}{m_j} kT_j d_{(j)}^{(0)} = \sum_j \frac{e_j \rho_j}{m_j} d_{(j)}^{(0)} \tag{3.33}$$

Con estos resultados podemos comenzar a contestar las evaluaciones de los flujos físicos $\mathbf{J}_q = \mathbf{J}_{q_a} + \mathbf{J}_{q_\mathbf{b}}$. El cálculo de la corriente de conducción requiere conocer a su vez $\mathbf{d}_{ab}$, difusión térmica como veremos. El capítulo cuatro está dedicado a la evaluación de los flujos físicos o corrientes.

Capítulo 4

Cálculo de los flujos y corrientes

4.1. Flujo de Calor

Calculemos de forma explícita la expresión para el flujo de calor, recordemos que $\mathbf{J}_{q_i} \equiv \frac{1}{2}\rho_i \langle \mathbf{c}_i c_i^2 \rangle$:

$$\mathbf{J}_{q_i} = \frac{1}{2} m_a \int \mathbf{c}_a c_a^2 f_a^{(0)} \varphi_a^{(1)} \mathrm{d}\mathbf{c}_a$$

que de acuerdo con (3.13), omitiendo el término $\nabla \mathbf{u}_i$ por el teorema de Curie, tenemos que

$$\mathbf{J}_{q_i} = \frac{1}{2} m_a \int \mathbf{c}_a c_a^2 f_a^{(0)} \left(\overrightarrow{\mathbb{A}_a} \cdot \nabla \ln T_a + \overrightarrow{\mathbb{D}_a} \cdot \mathbf{d}_{ab} \right) \mathrm{d}\mathbf{c}_a$$

donde $\overrightarrow{\mathbb{A}_a}$ y $\overrightarrow{\mathbb{D}_a}$ tienen la forma que discutimos en la ecuación (3.15). El siguiente paso es introducir (3.15) en $\mathbf{J}_{q_i}$ usando (3.27) y notando que todas las integrales que aparecen en la expresión resultante son iguales:

$$\int f_a^{(0)} \sum_{m=0}^{\infty} a^{(m)(i)} S_{\frac{3}{2}}^{(m)} c_a^2 \mathbf{c}_a \mathbf{c}_a \mathrm{d}\mathbf{c}_a = 5 \frac{n_a k^2 T_a}{m_a^2} a^{(0)(i)} \mathbb{I}$$

sabemos que la contribución de $\overset{\circ}{\overleftrightarrow{\mathbf{c}_a \mathbf{c}_a}}$ se anula por simetría, aquí $\mathbb{I}$ es la matriz unitaria. Haciendo las sustituciones correspondientes obtenemos:

$$\mathbf{J}_{q_a} = \frac{5}{2} \frac{n_a k^2 T_a}{m_a} \left\{ \begin{array}{c} a_a^{(1)(0)} \nabla \ln T_a + a_a^{(2)(0)} \nabla \ln T_a \times \mathbf{B} \\ a_a^{(3)(0)} \left(\mathbf{B} \cdot \nabla \ln T_a \right) \mathbf{B} + d_a^{(1)(0)} \mathbf{d}_{ab} \\ + d_a^{(2)(0)} \left(\mathbf{d}_{ab} \times \mathbf{B} \right) + d_a^{(3)(0)} \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{d}_{ab} \right) \mathbf{B} \end{array} \right\} \tag{4.1}$$

La ecuación (4.1) es un resultado muy elocuente: para conocer $\boldsymbol{J}_{q_a}$ NO necesitamos toda la información contenida en las series infinitas (3.27) sólo necesitamos seis coeficientes, tres para cada fuerza termodinámica. Esto simplificará considerablemente las soluciones de las ecuaciones integrales obtenidas en el capítulo anterior. Notemos también como el campo magnético influye fuertemente en los efectos difusivos y térmicos apareciendo en el flujo de calor $\mathbf{J}_{q_a}$. Esto se aprecia examinando la ecuación (3.10) la cual, incluso en la ausencia de un campo externo tiene dos contribuciones, la primera proviene de la difusión usual en los primeros dos términos y la segunda del término proporcional a $\mathbf{E}'$ que incluye el efecto del campo magnético (pues $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}$). Para entender de lleno el carácter de la ecuación (4.1) examinemos la estructura de sus términos, uno por uno, en un espacio tridimensional asumiendo que la dirección del campo magnético es en el eje z, i.e.

$$\mathbf{B} = B\hat{k}$$

Ahora reagrupemos la ecuación (4.1) convenientemente, el tercer término es simplemente $B^2 \frac{\partial T_a}{\partial z}$ y se combina con las contribuciones correspondientes en el primer término $\left(a_a^{(1)(0)} + a_a^{(3)(0)B^2}\right) \frac{\partial T_a}{\partial z}$, también tenemos que $\mathbf{B} \times \nabla T_a = B\left(\frac{\partial T_a}{\partial x}\hat{\jmath} - \frac{\partial T_a}{\partial y}\hat{\imath}\right)$, el procedimiento es el mismo para $\mathbf{d}_{ab}$, llegamos al siguiente resultado:

$$\mathbf{J}_{q_a} = \frac{5}{2}\frac{n_a k^2 T_a}{m_a}\left\{\begin{array}{c} \left[a_a^{(1)(0)} + a_a^{(3)(0)}B^2\right](\nabla \ln T_a)_\parallel \\ +a_a^{(1)(0)}(\nabla \ln T_a)_\perp + a_a^{(2)(0)}B(\nabla \ln T_a)_s \\ +\left[d_a^{(1)(0)} + B^2 d_a^{(3)(0)}\right](\mathbf{d}_{ab})_\parallel \\ +d_a^{(1)(0)}(\mathbf{d}_{ab})_\perp + d_a^{(2)(0)}B(\mathbf{d}_{ab} \times \hat{k}) \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

donde por simplicidad

$$(\nabla T_a)_\parallel \equiv \frac{\partial T_a}{\partial z}\hat{k},$$

$$(\nabla T_a)_\perp \equiv \frac{\partial T_a}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial T_a}{\partial y}\hat{\jmath}$$

y

$$(\nabla T_a)_s \equiv \frac{\partial T_a}{\partial x}\hat{\jmath} - \frac{\partial T_a}{\partial y}\hat{\imath}$$

además, la difusión total a lo largo de la dirección de $\mathbf{B}$

$$\left(\mathbf{d}_{ab} \cdot \hat{k}\right)\hat{k} \equiv (\mathbf{d})_\parallel$$

y

$$(\mathbf{d}_{ab})_\perp \equiv (d_a)_x\hat{i} + (d_a)_y\hat{j}$$

tenemos en general un flujo de materia y carga en la dirección del campo magnético, también en la dirección del plano (x, y) y del plano $(-x, y)$, ambos perpendiculares al campo magnético. Cuando $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ obtenemos una expresión para el flujo de calor para una componente, este resultado es idéntico al que se obtiene al resolver la ecuación de Boltzmann en el caso en el que hay sólo una especie de partículas, la única diferencia es el subíndice en la temperatura, esta expresión es conocida:

$$(\mathbf{J}_{q_a}) = \frac{5}{2}\frac{n_a k^2}{m_a} a_a^{(1)(0)} \nabla T_a \tag{4.3}$$

lo que resta de este trabajo es encontrar los coeficientes $a_a^{(1)(0)}$, pero como vemos, el resultado no cambiará respecto a los casos que ya están resueltos en la literatura, véase apéndices de [1].

El objetivo en este trabajo es fundamentar la hipótesis de equilibrio en las temperaturas impuesta en [1], que resuelve la ecuación de Bolztmann con la suposición de que $T_a = T_b = T$; para ello, debemos calcular el tiempo en el que se estima que se haga el balance de temperatura, es decir $T_a = T_b$; como veremos más adelante, encontraremos el tiempo libre medio τ_i con $i = a, b$ y calcularemos la razón $\frac{\tau_a}{\tau_b}$. Estimamos un tiempo muy corto (del orden de 10^-6 segundos), esto dará sustento a la hipótesis de [1].

Capítulo 5

Solución de las ecuaciones integrales

Como hemos visto, la solución de las ecuaciones (3.20) y (3.22) son conocidas, véase [1]. Ahora nos concentramos en la solución de las ecuaciones (3.20b) y (3.22b) cuya estructura se vuelve ligeramente más complicada debido a la presencia del campo magnético que aparece del lado derecho. Dado que estas ecuaciones tan solo son diferentes en el término inhomogéneo fijamos nuestra atención en (3.20b) cuya solución nos llevará a obtener los valores de los coeficientes a que necesitamos para calcular el flujo de calor $\mathbf{J}_{q_i}$. La solución de esta ecuación la vamos a buscar con un método variacional [1].

Tomemos $\mathfrak{J}_i$ $(i = a, b)$ como una función de prueba para $\mathbb{A}$ y construyamos un funcional, $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}_i)$ multiplicando toda la ecuación (3.20b) por $\mathfrak{J}_i\mathbf{c}_i$ e integrando sobre $\mathbf{c}_i$, tenemos:

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{J}_i) = \int \mathrm{d}\mathbf{c}_i \mathfrak{J}_i \mathbf{c}_i \cdot [-f_i^{(0)} \left(\frac{m_i c_i^2}{2kT_i} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{c}_i - f_i^{(0)} \frac{e_i}{m_i}(iB)\mathfrak{J}_i\mathbf{c}_i \tag{5.1}$$
$$+ f_i^{(0)} \frac{1}{\rho_i}(iB)G\mathbf{c}_i] + \int \mathrm{d}\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i \cdot \left[f_i^{(0)} \left(C(\mathbf{c}_i\mathfrak{J}_i) + C(\mathbf{c}_i\mathfrak{J}_i + \mathbf{c}_j\mathfrak{J}_j) \right) \right]$$

Por la definición de $\mathbb{A} = \mathbb{A}^{(1)} + iB\mathbb{A}^{(2)}$ y las ecuaciones (3.17), el tercer término queda:

$$\int \mathrm{d}\mathbf{c}_i \mathfrak{J}_i \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i \cdot f_i^{(0)} \frac{1}{\rho_i}(iB) \left\{ \frac{1}{2} \int \mathrm{d}\mathbf{c}_i f_i^{(0)} \mathfrak{J}_i \left[c_i^2 - \frac{1}{B^2}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{B})^2 \right] \right\}$$

lo que tenemos entre corchetes no depende de $\mathbf{c}_i$ entonces podemos escribir:

$$\frac{iB}{kT_i} \{ \qquad \} \frac{1}{3} m_i \int \mathrm{d}\mathbf{c}_i \mathfrak{J}_i c_i^2 f_i^{(0)} = 0$$

a la función $\mathfrak{J}_i$ le imponemos que debe obedecer las condiciones subsidiarias (3.25), tenemos

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{J}_i) = \int \mathrm{d}\mathbf{c}_i \mathfrak{J}_i \mathbf{c}_i \cdot \left[-f_i^{(0)} \left(\frac{m_i c_i^2}{2kT_i} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{c}_i - f_i^{(0)} \frac{e_i}{m_i}(iB)\mathfrak{J}_i \mathbf{c}_i \right]$$
$$+ \int \mathrm{d}\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i \cdot f_i^{(0)} \left[C(\mathbf{c}_i \mathfrak{J}_i) + C(\mathbf{c}_i \mathfrak{J}_i + \mathbf{c}_j \mathfrak{J}_j) \right]; \tag{5.1b}$$

el método variacional nos dice que estamos buscando una solución que satisfaga la siguiente condición:

$$\delta \mathfrak{D}(\mathfrak{J}_i) = 0,$$

necesitamos que sea consistente con las ecuaciones (3.25). Para exponer la variación usamos la expresión para el kernel linealizado $C(\mathbf{c}_i \mathfrak{J}_i)$ y $C(\mathbf{c}_i \mathfrak{J}_i + \mathbf{c}_j \mathfrak{J}_j)$ con esto podemos escribir los dos términos de la expresión anterior como:

$$\int \cdots \int \mathrm{d}\mathbf{c}_i \mathrm{d}\mathbf{c}_j' \mathrm{d}\mathbf{c}_i' f_i^{(0)} g_{ij} \sigma(\mathbf{c}_i \mathbf{c}_j \to \mathbf{c}_i' \mathbf{c}_j') \mathfrak{J}_i \cdot \mathbf{c}_i \cdot$$
$$\left[(\mathbf{c}_i' \mathfrak{J}_i') + (\mathbf{c}_j' \mathfrak{J}_j') - (\mathbf{c}_i' \mathfrak{J}_i') - (\mathbf{c}_j' \mathfrak{J}_j') \right]$$

esta expresión surge simplemente de la ecuación (2.4) sustituyendo f_i por $f_i^{(0)}(1+\varphi_i^{(1)})$ y quedándonos con los términos lineales en $\varphi_i^{(1)}$. Ahora expongamos las dos transformaciones que nos llevan al teorema H. Cambiemos primero i con j y luego $\mathbf{c}_i$ con $\mathbf{c}_i'$ y $\mathbf{c}_j$ con $\mathbf{c}_j'$ usando el hecho de que σ satisface (2.5), y como hemos visto, esto sigue siendo válido en (5.1b)

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{J}_i) = - \int \mathrm{d}\mathbf{c}_i c_i^2 \left(\frac{m_i c_i^2}{2kT_i} - \frac{5}{2} \right) f_i^{(0)} \mathfrak{J}_i - iB \frac{e_i}{m_i} \int \mathrm{d}\mathbf{c}_i f_i^{(0)} \mathfrak{J}_i^2 c_i^2$$
$$+ \frac{1}{4} \int \cdots \int \mathrm{d}\mathbf{c}_i \mathrm{d}\mathbf{c}_j' \mathrm{d}\mathbf{c}_i' f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij} \sigma \left[(\mathbf{c}_i' \mathfrak{J}_i') + (\mathbf{c}_j' \mathfrak{J}_j') - (\mathbf{c}_i \mathfrak{J}_i) - (\mathbf{c}_j \mathfrak{J}_j) \right]^2 = 0$$

Ahora llevamos a cabo la variación de $\mathfrak{J}_i$:

$$\delta \mathfrak{D}(\mathfrak{J}_i) = - \int \mathrm{d}\mathbf{c}_i c_i^2 \left(\frac{m_i c_i^2}{2kT_i} - \frac{5}{2} \right) f_i^{(0)} \delta \mathfrak{J}_i - 2iB \frac{e_i}{m_i} \int \mathrm{d}\mathbf{c}_i f_i^{(0)} \mathfrak{J}_i^2 c_i^2 \delta \mathfrak{J}_i$$
$$+ \frac{1}{2} \int \cdots \int \mathrm{d}\mathbf{c}_i \mathrm{d}\mathbf{c}_j' \mathrm{d}\mathbf{c}_i' f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij} \sigma \left[(\mathbf{c}_i' \mathfrak{J}_i') + (\mathbf{c}_j' \mathfrak{J}_j') - (\mathbf{c}_i \mathfrak{J}_i) - (\mathbf{c}_j \mathfrak{J}_j) \right]$$
$$\times \left[(\mathbf{c}_i' \delta \mathfrak{J}_i') + (\mathbf{c}_j' \delta \mathfrak{J}_j') - (\mathbf{c}_i \delta \mathfrak{J}_i) - (\mathbf{c}_j \delta \mathfrak{J}_j) \right]^2$$

Ahora hacemos las operaciones del teorema H una vez más sobre este último término para que el último paréntesis aparezca sólo como $\mathbf{c}_i\delta\mathfrak{J}_i$, veamos

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(\mathfrak{J}_i) = -\int \mathrm{d}\mathbf{c}_i c_i \delta\mathfrak{J}_i \left(\frac{m_i c_i^2}{2kT_i} - \frac{5}{2}\right) f_i^{(0)}\mathbf{c}_i - 2iB\frac{e_i}{m_i} f_i^{(0)} c_i^2 \mathfrak{J}_i \\ + \int \mathrm{d}\mathbf{c}_i'\mathrm{d}\mathbf{c}_j' f_i^{(0)} f_j^{(0)} g_{ij}\sigma\mathbf{c}_i \cdot [\qquad] = 0\end{aligned}$$

esto para todo $\mathfrak{J}_i$. La ecuación que nos resulta para $\mathfrak{J}_i$ es:

$$\begin{aligned} f_i^{(0)}\left(\frac{m_i c_i^2}{2kT_i} - \frac{5}{2}\right) = -2iB\mathbf{c}_i\frac{e_i}{m_i} f_i^{(0)} c_i \mathfrak{J}_i \\ +2f_i^{(0)}\left[(\mathbf{c}_i'\delta\mathfrak{J}_i') + (\mathbf{c}_j'\delta\mathfrak{J}_j') - (\mathbf{c}_i\delta\mathfrak{J}_i) - (\mathbf{c}_j\delta\mathfrak{J}_j)\right] + 2\alpha f_i^{(0)}\mathbf{c}_i\end{aligned} \tag{5.2}$$

donde α es un parámetro que no está determinado y que no depende de i además requiere que $\mathfrak{J}_i$ satisfaga (3.25). Pero hemos visto al principio de este capítulo que incluso (3.20b) lo satisface, podemos aseverar que (5.2) es equivalente a (3.20b). Esto implica que $\mathfrak{J}_i$, una solución de (5.2) que es condición estacionaria para $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}_i)$, es la solución apropiada para (3.20b). Notemos que si tomamos:

$$\mathfrak{J}_i = \mathbb{A}_i + \mathcal{O}(\delta^2)$$

donde δ es muy pequeña

$$\mathfrak{D}_i(\mathfrak{J}_i) = \mathfrak{D}(\mathbb{A}_i) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

resulta que tenemos una función de prueba no muy buena (en principio) que nos da un valor razonablemente bueno para $\mathfrak{D}_i(\mathfrak{J})$, lo cual buscamos. Ahora podemos usar (3.27) y proponer la solución de (5.2), el desarrollo de Sonine:

$$\mathfrak{J}_i = \mathbb{A}_i = \sum_{m=0}^{(M)} a_i^{(m)} S_{\frac{3}{2}}^{(m)}(c_i) \tag{5.3}$$

para aplicar el procedimiento del principio variacional debemos evaluar cada término en la ecuación (5.1); el límite M en la suma lo tomamos para etiquetar el orden de las aproximaciones. Entonces el primer término en (5.1):

$$\int f_i^{(0)}\left(\frac{m_i c_i^2}{2kT_i} - \frac{5}{2}\right) c_i^2 \sum_{m=0}^{M} a_i^{(m)} S_{(\frac{3}{2})}^{(m)} \mathrm{d}\mathbf{c}_i = \frac{15}{2}kT_i\frac{n_i}{m_i}a_i^{(1)}$$

si usamos la ecuación (3.26) el segundo término de (5.1) queda:

$$\frac{iBe_i}{m_i}\int \mathrm{d}\mathbf{c}_i c_i^2 \mathfrak{I}_i^2 f_i^{(0)} =$$

$$iB\frac{e_i}{m_i}\int_0^\infty \mathrm{d}\mathbf{c}_i c_i^2 \sum_{m=0}^{M} a_i^{(m)} S_{(\frac{3}{2})}^{(m)}(c_i) \sum_{m=0}^{M} a_i^{(m')} S_{(\frac{3}{2})}^{(m')}(c_i) f_i^{(0)}$$

ahora hacemos una transformación a la velocidad adimensional $\mathbf{w}_i$, fijando $m = m'$ por la propiedad de ortonormalidad de los polinomios de Sonine (3.26) y llevando a cabo la integración sobre $\mathbf{w}_i$ tenemos que:

$$\frac{iBe_i}{m_i}\int \mathrm{d}\mathbf{c}_i c_i^2 \mathfrak{I}_i^2 f_i^{(0)} = iBkT_i\frac{e_i n_i}{m_i^2}\left(6(a_i^{(0)})^2 + 15(a_i^{(1)})^2\right)$$

el tercer término de (5.1) se anula debido a las condiciones subsidiarias, en el cuarto término nos quedamos con la expresión para el kernel de colisión linealizado. Expresado de esta manera es inadecuado manejarlo, requiere algunos resultados concernientes a las propiedades de las integrales de colisión, Véase apéndice B de referencia [1]. De hecho con la misma aproximación al segundo término, o sea $M = 0, 1$ la expresión completa para el kernel linealizado de colisión es:

$$\begin{aligned} I \equiv \int \cdots \int f_i^{(0)} f_j^{(0)} \mathrm{d}\mathbf{v}_i' \mathrm{d}\mathbf{v}_j' \sigma(\Omega) \mathrm{d}\Omega g_{ij} \left\{ a_i^{(0)}\mathbf{c}_i - a_i^{(1)}\mathbf{c}_i \left(w_i^2 - \frac{5}{2} \right) \right\} \\ \times \left[a_i^{(0)}\mathbf{c}_i' - a_i^{(i)}\mathbf{c}_i \left(w_i'^2 - \frac{5}{2} \right) + a_j^{(0)}\mathbf{c}_j' - a_j^{(1)}\mathbf{c}_j' \left(w_j'^2 - \frac{5}{2} \right) \right] \\ \left[-a_i^{(0)}\mathbf{c}_i + a_i^{(1)}\mathbf{c}_i \left(w_i^2 - \frac{5}{2} \right) - a_j^{(0)}\mathbf{c}_j + a_j^{(1)}\mathbf{c}_j \left(w_j'^2 - \frac{5}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Cambiando los índices $i \to j$ y $\mathbf{c}_i \to \mathbf{c}_i'$, $\mathbf{c}_j \to \mathbf{c}_j'$, la misma transformación para probar el teorema H. Llegamos al siguiente resultado:

$$I = -\frac{1}{2} n_i n_j \left[G_{ij}, H_{ij} \right] \tag{5.4}$$

donde

$$G_{ij} = a_i^{(0)}\mathbf{c}_i - a_i^{(1)}\mathbf{c}_i \left(w_i^2 + \frac{5}{2} \right) + a_j^{(0)}\mathbf{c}_j - a_j^{(1)}\mathbf{c}_j \left(w_j'^2 - \frac{5}{2} \right) \tag{5.4b}$$

$$H_{ij} = G_{ij} \tag{5.4c}$$

si ahora definimos:

$$K_i \equiv a_i^{(0)}\mathbf{c}_i - a_i^{(1)}\mathbf{c}_i\left(w_i'^2 - \frac{5}{2}\right) \tag{5.5}$$

$$L_i \equiv a_j^{(0)}\mathbf{c}_j - a_j^{(1)}\mathbf{c}_j\left(w_j'^2 - \frac{5}{2}\right)$$

tomando $M_i = K_i$, $M_j = L_j$ y usando la ecuación (D.4) con (5.5), luego de un álgebra algo tediosa encontramos que:

$$\begin{aligned} I = 2n_a^2(a_a^{(1)})^2\left[\mathbf{c}_a\left(w_a^2-\frac{5}{2}\right),\mathbf{c}_a\left(w_a^2-\frac{5}{2}\right)\right]_{aa} + 2n_b^2(a_b^{(1)})^2\left[\mathbf{c}_b\left(w_b^2-\frac{5}{2}\right),\mathbf{c}_b\left(w_b^2-\frac{5}{2}\right)\right]_{bb} \\ +n_an_b(a_a^{(0)})^2[\mathbf{c}_a,\mathbf{c}_a]_{ab} - 2a_a^{(0)}a_a^{(1)}\left[\mathbf{c}_a,\mathbf{c}_a\left(w_a^2-\frac{5}{2}\right)\right]_{ab} + (a_a^{(1)})^2\left[\mathbf{c}_a\left(w_a^2-\frac{5}{2}\right),\mathbf{c}_a\left(w_a^2-\frac{5}{2}\right)\right]_{ab} \\ +(a_b^{(0)})^2[\mathbf{c}_a,\mathbf{c}_b]_{ab} - 2a_a^{(0)}a_b^{(1)}\left[\mathbf{c}_b,\mathbf{c}_b\left(w_b^2-\frac{5}{2}\right)\right]_{ab} + (a_b^{(1)})^2\left[\mathbf{c}_b\left(w_b^2-\frac{5}{2}\right),\mathbf{c}_b\left(w_b^2-\frac{5}{2}\right)\right]_{ab} \\ +2a_a^{(0)}a_b^{(0)}[\mathbf{c}_a,\mathbf{c}_b]_{ab} - 2a_a^{(0)}a_b^{(1)}\left[\mathbf{c}_b,\mathbf{c}_b\left(w_b^2-\frac{5}{2}\right)\right]_{ab} - 2a_b^{(0)}a_a^{(1)}\left[\mathbf{c}_b,\mathbf{c}_a\left(w_a^2-\frac{5}{2}\right)\right]_{ab} \\ +2a_a^{(1)}a_b^{(1)}\left[\mathbf{c}_a\left(w_a^2-\frac{5}{2}\right),\mathbf{c}_b\left(w_b^2-\frac{5}{2}\right)\right]_{ab} \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde las doce integrales de colisión que aparecen aquí están evaluadas en el apéndice D de la referencia [1], relacionando la velocidad adimensional con una simple integral de colisión $[w_a, w_a] \equiv \varphi$ en el límite cuando $m_a >> m_b$. Escribiendo a I en términos de φ e introduciendo un factor apropiado $\left(\frac{2kT_i}{m_i}\right)$ para cada $\mathbf{c}_i$ en el término de colisión, luego de colectar los tres términos que componen (5.1) tenemos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\mathfrak{J}_i) = -\frac{15}{2}kT_i\left(\frac{n_a}{m_a}a_a^{(1)} + \frac{n_b}{m_b}a_b^{(1)}\right) + 3iBkT_i\frac{e_in_i}{m_i^2}\left(2(a_i^{(0)})^2 + 5(a^{(1)})^2\right) \\ +n_an_b\varphi kT_i\{\frac{1}{m_a}(a_a^{(0)})^2 - \frac{3}{m_a}a_a^{(0)}a_a^{(1)} + \frac{13}{4m_a}(a_a^{(1)})^2 + \frac{M_1}{m_b}(a_b^{(0)})^2 - \frac{3}{\sqrt{m_bm_a}}a_a^{(0)}a_a^{(1)} \\ +\frac{15M_1}{2}(a_b^{(1)})^2 - 2\sqrt{\frac{M_1}{m_am_b}}a_a^{(0)}a_b^{(0)} - \frac{3M_1^2}{m_b}a_a^{(0)}a_b^{(1)} + 3\sqrt{\frac{M_1}{m_am_b}}a_b^{(0)}a_a^{(1)} - \frac{27M_1}{2\sqrt{m_am_b}}a_a^{(1)}a_b^{(1)}\} \\ 2kT_a\varphi\left\{\frac{\sqrt{2}}{m_a}(a_a^{(1)})n_a^2 + \frac{2M_1}{m_b}(a_b^{(1)})^2n_b^2\right\} \end{aligned} \tag{5.7}$$

el cual, bajo la condición $\delta\mathfrak{D}(\mathfrak{J}) = 0$ nos lleva a un conjunto de ecuaciones algebraicas para los coeficientes que aún no conocemos $a_a^{(0)}$, $a_b^{(0)}$, $a_a^{(1)}$ y $a_b^{(1)}$. Aquí,

$M_1 = \frac{m_a}{m_a+m_b}$, y φ es conocido, su valor está en el apéndice D de la referencia [1]. Aún debemos introducir la condición subsidiaria (3.30b), i.e.

$$n_a a_a^{(0)} + n_b a_b^{(0)} = 0$$

antes de que tomemos la variación de (5.7) nos conviene escribirla ligeramente diferente, para esto introducimos $e_a = -e$, $e_b = e$, las frecuencias características $\omega_i = \frac{e_i B}{m_i}$ y (3.30b), tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{D}(\mathfrak{J}_i)}{\varphi k T_a} &= -\frac{15}{2\varphi}\left(\frac{n_a}{m_a}a_a^{(1)} + \frac{n_b}{m_b}a_b^{(1)}\right) \\ +\frac{6i}{\varphi}\left(-\frac{n_a}{m_a}\omega_a(a_a^{(0)})^2 + \frac{n_b}{m_b}\omega_b(a_b^{(0)})^2\right) &+ \frac{3i}{\varphi}\left(-\frac{5}{2}\frac{n_a}{m_a}\omega_a(a_a^{(1)})^2 + \frac{5}{2}\frac{n_b}{m_b}\omega_b(a_b^{(1)})^2\right) \\ +n_a n_b\{\frac{1}{m_a}(a_a^{(0)})^2 + \frac{3}{m_a}a_a^{(0)}a_a^{(1)} &+ \frac{13}{4m_a}(a_a^{(1)})^2 + \frac{M_1}{m_b}(a_b^{(0)})^2 - \frac{3}{\sqrt{m_b m_a}}a_a^{(0)}a_a^{(1)} \\ &+ \frac{15M_1}{2}(a_b^{(0)})^2 - 2\sqrt{\frac{M_1}{m_a m_b}}a_a^{(0)}a_b^{(0)} + 3\sqrt{\frac{M_1}{m_a m_b}}a_b^{(0)}a_a^{(1)} \\ &- \frac{27M_1^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{m_a m_b}}a_a^{(1)}a_b^{(1)}\} + \sqrt{2}\frac{n_a^2}{m_a}(a_a^{(1)})n_a^2 + \frac{\sqrt{2M_1}}{m_b}\frac{n_b^2}{m_b}(a_b^{(1)})^2 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Ahora tomamos la variación de (5.8), colectamos los términos en la variación independiente de $\delta a_a^{(0)}$, $\delta a_a^{(1)}$ y $\delta a_a^{(1)}$ y fijamos cada coeficiente igual a cero, esto nos lleva a tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 a_a^{(0)} - \mathbb{A}_2 a_a^{(1)} - \mathbb{A}_3 a_b^{(1)} &= 0 \\ -\mathbb{B}_1 a_a^{(0)} + \mathbb{B}_2 a_a^{(1)} - \frac{9}{2}M_1^2 a_b^{(1)} &= 5\tau_a \\ -\mathbb{C}_1 a_a^{(0)} - \frac{9}{2}M_1 a_a^{(1)} - -\mathbb{C}_2 a_b^{(1)} &= \frac{5\tau_a}{M_1}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Para un plasma totalmente ionizado escribimos $n_a = n_b = \frac{n}{2}$. Además $n\tau_a = \varphi^{-1}$ es el *tiempo libre medio de colisión para cada especie*, los coeficientes en (5.9) son:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 &= 2\left(1 + M_1^2 - 2M_1 - 6i\omega_a\tau_a\right) \\ \mathbb{A}_2 &= -3\left(1 + M_1\right) \\ \mathbb{A}_3 &= \frac{3}{2}M_1^2\left(\sqrt{M_1} - 1\right) \\ \mathbb{B}_1 &= -\left(1 + M_1\right) \\ \mathbb{B}_2 &= \frac{13}{16} + \frac{4}{3}\sqrt{2} - i\omega_a\tau_a \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_1 &= -1 + M_1\\ \mathbb{C}_2 &= 5 + \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{2}{M_1}} + 5i\omega_a\tau_a\end{aligned}$$

para el caso $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ el conjunto que resulta es trivial de resolver, al menos aproximadamente, imponiendo las potencias de $M_1^n \sim \left(\frac{1}{1836}\right)^n$, $n \geq 1 \sim 0$ en todas las sumas, digamos $1 + M_1^n \simeq 1$. El resultado es

$$\begin{aligned}a_a^{(0)} &= 2{,}94\tau_a\\ a_a^{(1)} &= 1{,}96\tau_a\\ a_b^{(1)} &= \frac{0{,}7265}{M_1}\tau_a\end{aligned} \tag{5.11}$$

lo cual se verifica con una computadora. La solución cuando $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ se bosqueja en el apéndice E de la referencia [1].

Para calcular los d'_{is} el procedimiento es completamente similar. La forma de la función $\mathfrak{D}\mathfrak{J}_i$ únicamente cambia en la parte inhomogénea, esta vez es $\frac{n_i}{n} f_i^{(0)}\mathbf{c}_i$. Cuando multiplicamos esto por $-\tau_i\mathbf{c}_i$ e integramos sobre las velocidades luego de fijar

$$\mathfrak{J}_i = \sum_{m=0}^{M} d_i^{(m)} S_{\frac{3}{2}}^{(m)}(c_i),$$

tenemos:

$$-n\frac{n_i}{n}\int f_i^{(0)}\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{c}_i\sum_{m=0}^{M} d_i^{(m)} S_{\frac{3}{2}}^{(m)}(c_i)\mathrm{d}\mathbf{c}_i = 3kT_i\frac{n_a^2}{m_a}n\left(1 - M_1\frac{n_b}{n_a}\right)$$

El resultado es un conjunto algebraico para $d_i^{(0)}$, $d_i^{(1)}$, $i = a, b$ idéntico al que damos en (5.9) excepto que el término inhomogéneo cambia de forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{15}{2}\tau_a \\ \frac{15}{2M_1}\tau_a \end{pmatrix} \quad \text{cambia a} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(1 - M_1)\tau_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

Una vez más, la solución más simple, cuando $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}d_a^{(0)} &= 1{,}191\tau_a\\ d_a^{(1)} &= 0{,}294\tau_a\\ d_b^{(1)} &= 0{,}0234\tau_a\end{aligned} \tag{5.13}$$

Para el caso donde $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ hay un bosquejo en el apéndice E de [1].

Capítulo 6

Resultados

6.1. Flujo de Calor

En esta sección hacemos uso de los resultados de los capítulos anteriores y del apéndice D de la referencia [1] para escribir los coeficientes de transporte para el flujo de calor $\mathbf{J}_{q_a}$. En el capítulo cuatro, elegimos que el campo magnético esté orientado en la dirección del eje z, es decir $\mathbf{B} = B\hat{k}$, recordando la ecuación (4.2) escribimos:

$$\mathbf{J}_{q_a} = \frac{5}{2}\frac{n_a k^2 T_a}{m_a}\left\{\begin{array}{c} \left[\alpha_i^{(1)}\right](\nabla \ln T_a)_\parallel \\ +a_a^{(1)(0)}(\nabla \ln T_a)_\perp + a_a^{(2)(0)}B(\nabla \ln T_a)_s \\ \pm\left[\delta_i^{(1)}\right](\mathbf{d}_{ab})_\parallel \\ \pm d_a^{(1)(0)}(\mathbf{d}_{ab})_\perp \pm d_a^{(2)(0)}B(\mathbf{d}_{ab}\times\hat{k}) \end{array}\right\} \tag{6.1}$$

donde los signos menos de los últimos tres términos se deben tomar en cuenta debido a que $\mathbf{d}_{ij} = -\mathbf{d}_{ji}$. Todos los coeficientes $\alpha_i^{(1)} = a_a^{(1)(0)} + a_a^{(3)(0)}B^2$ y $\delta_i^{(1)} = d_a^{(1)(0)} + B^2 d_a^{(3)(0)}$ los vemos en las ecuaciones (5.11) y (5.13) además del apéndice E de [1].

6.2. Tiempo de relajación de temperaturas de distintas especies

En 1936, en el estudio de un plasma como el que nosotros trabajamos, Landau calculó el tiempo en el cual las temperaturas de iones y electrones se iguala. Landau hace uso de la llamada integral de colisión de Landau (véase ref [7] y [8]), que se obtiene haciendo un desarrollo en series de Taylor de la parte colisional de la ecuación de Boltzman, ecuación (2.4) de nuestro texto.
En nuestro caso no hemos utilizado la célebre integral de colisión de Landau, sino que hemos trabajado con la integral de colisión en forma completa (2.4),

dichas integrales de colisión están resueltas en [1]. Pero la idea que usamos para estimar el tiempo en el cual debido a las colisiones las temperaturas de los electrones y protones se iguala es la misma idea que la de Landau, veamos; en el sistema que estudiamos existen tres tipos de colisiones, electrón-electrón, protón-protón y electrón-protón, y para cada una de estas colisiones existe una integral de colisión del tipo de la ecuación (2.4), nosotros pensamos que nuestro plasma corresponde a un *gas de Lorentz* (véase ref [3] sección 2.8). La masa de los protones es 1836.15 veces más grande que la de los electrones, debido a esto cuando un electrón choca con un protón sus energías se alteran poco, pero es justo el efecto que deseamos estudiar. *La única manera en que pueden intercambiar energía los electrones con los protones es chocando* así que hacemos lo mismo que hizo Landau, asociamos la integral de colisión de electrones con protones con el cambio de la densidad de energía de los electrones con respecto al tiempo, que es igual al negativo del cambio de la densidad de energía de los protones respecto al tiempo, digamos:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_e}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\varepsilon_p}{\mathrm{d}t}$$

La integral de colisión que asocia choques entre electrones y protones está resuelta en [1] apéndice D, una vez hecha la suposición de que $m_p \gg m_e$ y escribiéndola en términos del tiempo libre medio, que es el tiempo que en promedio le toma a una partícula que ha chocado con otra de distinta especie chocar con una tercera de distinta especie:

$$\frac{1}{n\tau_{\mathrm{ep}}^{eq}} = \sqrt{2\pi}\left(\frac{m_e}{m_e+m_p}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^4\psi}{(4\pi\varepsilon_0)^2(kT_e)^{3/2}}$$

entonces la cantidad de energía transmitida

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_e}{\mathrm{d}t} \equiv -\frac{nk\Delta T}{\tau_{\mathrm{ep}}^{eq}} \tag{6.2}$$

donde $\Delta T = T_e - T_p$, luego haciendo las sustituciones apropiadas teniendo en cuenta que ψ es el logaritmo de Coulomb (pues la interacción de las partículas es la de Rutherford) es:

$$\psi = \ln\left\{1+\left(\frac{4kT_e d}{k_e e_1 e_2}\right)^2\right\}$$

aquí d es la distancia de Debye [1],
Sabemos que $k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, donde ε_0 es la permitividad en el vacío $\varepsilon_0 = 8{,}85^{-12}\mathrm{F/m}$, la carga fundamental $e = 1{,}602\times10^{-19}\mathrm{C}$ y la constante de Bolztmann $k = 1{,}38065\times10^{-23}\mathrm{J/K}$.
Hacemos uso de la relación entre densidad de energía y temperatura, pero

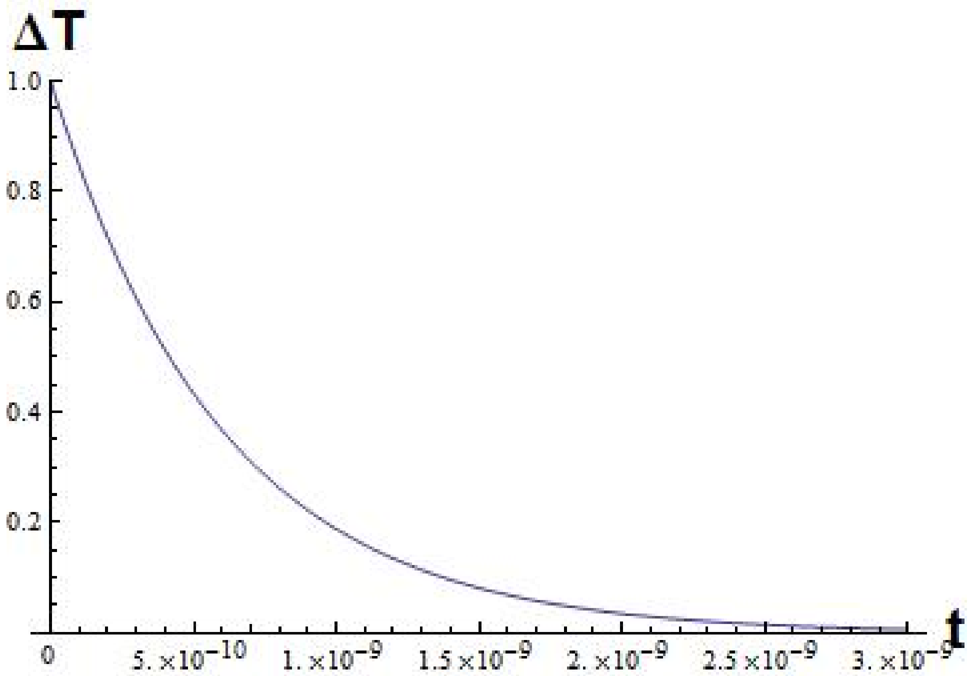

Figura 6.1: Decaimiento de la diferencia de temperaturas

recordemos que el gas está totalmente ionizado, i.e. $n_e = n/2$ y $n_p = n/2$, entonces con $\varepsilon_e = \frac{3}{2}n_e k T_e$ y resolviendo tenemos,

$$\Delta T = \exp\left[-\frac{4}{3}\frac{t}{\tau_{ep}}\right] \tag{6.3}$$

Esta expresión es de suma importancia, ya que es justificación de la hipótesis hecha por L. García Colín y L. Dagdug [1] que supone que las temperaturas de los electrones y de los protones son las mismas desde un inicio, es decir $T_e = T_p$. Si hacemos un gráfica considerando $n \sim 10^{23}$ es decir un mol, vemos como se igualan las temperaturas en el tiempo, y es claro que el tiempo que les toma es muy corto $\sim 10^{-9}$s

Tomando en cuenta lo anterior, podemos justificar la hipótesis que propone temperaturas iguales desde el inicio, hecha por García-Colín L. and Dagdug L.[1].

Bibliografía

[1] García-Colín L. y Dagdug L., *La Teoría Cinética de un Plasma Diluido Ionizado*, El Colegio Nacional (2008)

[2] García-Colín L. y Goldstein P., *La física de los procesos irreversibles*, Tomo 1, El Colegio Nacional (2003)

[3] Balescú R., *Transport processes in plasmas* Vol 1, North-Holland (1988)

[4] P. Goldstein y L. García-Colín; *J. Non Equilib. Thermodyn.* **30**, 173 (2005)

[5] L. García-Colín; *Teoría Cinética de los Gases* Colección CBI, Universidad Autónoma Metropolitana (1990)

[6] S. I. Braginskii; *Transport Phenomena in a Completely Ionized Two-Temperature Plasma* SOVIET PHYSICS JETP, vol 6 (33) No. 2 February 1958

[7] L. D. Landau; *The Transport Equation in a case of Coulomb Interactions* The Landau Collected Papers, page 163. (1936)

[8] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol 10; *Physical Kinetics* Pergamon Press (1981).